

极化效应作用下长方体各向同性电光晶体中 光束相移的解析计算

樊星¹, 陈维江^{2*}, 张乔根¹, 赵军³, 裴哲浩¹

(1. 电力设备电气绝缘国家重点实验室(西安交通大学), 陕西省 西安市 710049; 2. 国家电网有限公司, 北京市 西城区 100031; 3. 中国电力科学研究院有限公司, 湖北省 武汉市 430074)

Analytical Calculation of Beam Phase-shift in Cuboid Isotropic Electro-optic Crystal With Polarization Effect

FAN Xing¹, CHEN Weijiang^{2*}, ZHANG Qiaogen¹, ZHAO Jun³, PEI Zhehao¹

(1. State Key Laboratory of Electrical Insulation and Power Equipment (Xi'an Jiaotong University), Xi'an 710049, Shaanxi Province, China; 2. State Grid Corporation of China, Xicheng District, Beijing 100031, China; 3. China Electric Power Research Institute, Wuhan 430074, Hubei Province, China)

ABSTRACT: The calculation of beam phase-shift in electro-optic(E-O) crystal is a key in the research of optical electric field sensors, but the influence of polarization effect of crystal on phase-shift under the action of the spatial electric field has not been deeply understood. In this paper, the calculation method of the beam phase-shift in cuboid isotropic E-O crystal with the polarization effect was proposed, an electric field transformation tensor was defined to describe the correlation between the internal electric field of crystal and the space electric field, and the phase-shift formula which introduces the electric field transformation tensor was deduced. This method considered both the polarization effects of E-O crystal and environmental medium, and can be used to calculate the beam phase-shift in the cuboid isotropic E-O crystal with any three-dimensional sizes and dielectric constants. The calculation results show that the dielectric constant ratio of crystal to environmental medium is the key factor, and an increase of this ratio will cause a nonlinear attenuation of beam phase-shift; three-dimensional sizes of the crystal all have significant effects on the phase-shift; the beam path in crystal is also an important factor affecting the phase-shift. Finally, an experiment was carried out with BGO crystal to verify the phase-shift formula. This paper can provide a theoretical basis for the calculation of the beam phase-shift in E-O crystal and the optimal design of the optical electric field sensors.

KEY WORDS: optical electric field sensor; spatial electric field; electro-optic crystal; isotropic; polarization effect; beam phase-shift

摘要: 电光晶体中光束相移的计算对光学电场传感器的研究至关重要,但空间电场作用下晶体极化效应对光束相移的影响尚未得到深入理解。该文提出极化效应作用下长方体各向同性电光晶体中光束相移的计算方法,定义电场变换张量以描述极化效应作用下晶体内部电场与空间电场之间的关联关系,推导出引入电场变换张量的光束相移公式。该方法同时考虑空间电场作用下电光晶体和环境介质的极化效应,可用于计算具有任意三维尺寸和介电特性的长方体各向同性电光晶体中的光束相移。结果表明:电光晶体与环境介质的介电常数之比是关键因素,该比例的增加会引起光束相移的非线性衰减;晶体三维尺寸的变化均会对光束相移产生显著影响;光束在晶体中的传播路径也是影响光束相移的重要因素。最后,以BGO晶体为例开展实验,验证相移公式的有效性。该文研究可为电光晶体中光束相移的计算评估以及光学电场传感器的优化设计提供理论依据。

关键词: 光学电场传感器; 空间电场; 电光晶体; 各向同性; 极化效应; 光束相移

0 引言

新型电力系统的数字化建设对具有高性能参数、适用于强电磁环境的先进电场传感器提出了迫切需求^[1]。基于Pockels效应的光学电场传感器具有频带宽、电场测量范围广以及抗电磁干扰能力强等优势,在电磁瞬态过程检测和电力设备状态监测等

基金项目: 国家自然科学基金(面上基金项目)(51977199)。

Project Supported by National Natural Science Foundation of China (General Program) (51977199).

领域具有显著的应用潜力^[2-7]。

光学电场传感器的基本原理是：空间电场会改变电光晶体的折射率，通过直接测量电光晶体中传播光束的相移变化可获得晶体的折射率变化，进而计算出空间电场的强度^[8-10]。电光晶体中光束相移的有效评估直接关系到传感器的设计与优化。目前常用计算相移的公式是由折射率椭球法推导获得的，描述了电光晶体折射率与外施电场的关系。但该公式仅适用于分析电光调制器等电压调控型器件中的光束相移，因为此类器件中施加电压激励的电极直接贴敷在电光晶体两侧，晶体内部电场可直接由外施电压除以晶体厚度求得。而光学电场传感器属于电场调控型器件，其响应直接由空间电场决定。在这种情况下，电光晶体的内部电场并不像电光调制器那样可简单推算，空间电场作用下晶体的极化效应必然会影响其内部电场并改变光束传播所经历的折射率，这将导致现有相移公式产生明显偏差，难以应用于光学电场传感器中光束相移的研究。因此，研究极化效应作用下电光晶体中光束相移的计算方法对光学电场传感器的深入研究十分重要。

已有学者对电光晶体中的光束相移进行了研究，Bulmer 等提出了基于晶体 Pockels 效应来测量电场的原理，并推导出相移的数学公式^[11]。Duvillaret 等使用折射率椭球法推导了不同调制方式下晶体的相移公式，并据此评估晶体材料的品质因数^[12-13]。W. L. She 等提出了线性电光效应耦合波理论，从波动光学的角度描述了电光晶体的二阶非线性光学效应对线性相移的决定性作用^[14]。Zhang 等根据不同入射角度下的折射率与光束路径，提出了光束在任意入射角度下的相移公式^[15]。然而，折射率椭球法并不能有效描述电场测量时电光晶体中的光束相移。学者们发现传统的相移公式对晶体灵敏度的预测与实验数据并不一致，并认为晶体介质的极化效应可能是重要的影响因素。K. Hidaka 等提出在分析传感器性能时需要考虑电光晶体的介电常数，并评估了不同晶体的介电特性与测量性能^[16]。Neurgaonkar 等采用除以相对介电常数的方法来修正品质因数，并对两类掺杂型晶体的品质进行了评估^[17]。Bordovsky 等通过类比椭球体的退极化过程，引入了椭球的退极化因子对相移公式进行修正^[18]。Garzarella 等通过类比椭球法研究了长方体晶体的极化效应对传感器性能的影响，并认为可

以基于晶体形状设计来提升测量灵敏度^[19]。

以上研究在极化效应对光束相移的影响方面还缺乏深入认识，主要存在两个问题：1) 未考虑环境介质对晶体中光束相移的影响，空间电场作用下晶体附近环境介质的极化也会直接影响晶体的内部电场，进而通过电光效应改变电光晶体的折射率，所以在相移计算时须考虑环境介质的影响；2) 在考虑极化效应时现有研究均采用了椭球体近似的方法来计算晶体的内部电场，但这与实际情况不符。在电场传感器的研究中所使用的电光晶体均是非椭球体，其中绝大多数都是长方体。长方体晶体极化所引起的界面效应会引起退极化场在空间上的不均匀分布，退极化因子会成为空间坐标的函数，可能导致光束沿不同路径传播所经历的折射率不同。而椭球体中电场是均匀分布且退极化因子为常数，这将导致使用椭球体近似的方法无法反应传感器真实的相移特性，不仅导致计算结果存在偏差，还忽视了光束传播路径的影响。因此，要解决以上问题，深入认识光学电场传感器的响应机理，就需要研究晶体极化和环境介质极化共同作用下长方体电光晶体中光束相移的计算方法。

因此，本文首先提出极化效应作用下各向同性电光晶体中光束相移的计算思路，基于长方体结构的各向同性电光晶体，推导电光晶体极化与环境介质极化共同作用下晶体内部电场的三维解析模型，并结合折射率椭球法推导出考虑极化效应的光束相移公式。其次，计算并分析相对介电常数、晶体三维尺寸以及光束传播路径对电光晶体中光束相移的影响规律。最后，以 $\text{Bi}_4\text{Ge}_3\text{O}_{12}$ (BGO) 晶体为例开展验证性实验，验证相移公式的有效性。本文研究对于电光晶体中光束相移的计算评估以及光学电场传感器的优化设计具有重要意义。

1 电光晶体中光束相移的基本理论

折射率椭球理论被广泛用于描述电场作用下电光晶体的折射率变化^[13]。以各向同性晶体为例，在无外施电场情况下，晶体的折射率椭球完全由本征折射率决定，椭球的主轴均与晶体的主轴重合。当沿晶体主介电轴方向施加电场时，晶体的各向同性转变为各向异性，折射率椭球的主轴将旋转至新的场致介电主轴方向，可描述为

$$\frac{x_1^2}{(n_0 + n_E)^2} + \frac{y_1^2}{(n_0 - n_E)^2} + \frac{z_1^2}{n_0^2} = 1 \quad (1)$$

式中： n_0 是电光晶体的本征折射率； n_E 是场致折射率； x_1 、 y_1 、 z_1 分别代表3个新介电主轴方向的坐标。新介电主轴方向上的折射率可以描述为

$$\begin{cases} n_1 = n_0 + n_E \\ n_2 = n_0 - n_E \\ n_3 = n_0 \end{cases} \quad (2)$$

电光效应引起的折射率 n_E 为

$$n_E = \frac{1}{2} n_0^3 \gamma_{41} E \quad (3)$$

式中： γ_{41} 是晶体的电光系数； E 为晶体电场强度。

线性偏振光在电光晶体中传播时，由于电场导致折射率椭球的旋转，各项异性的折射率会使线偏振光分解为两个垂直传播的分量，即场致双折射效应。这两束正交的偏正光在晶体中的传播速度存在差异。光束穿过晶体后，两个正交分量之间会产生相位差，其大小取决于晶体的内部电场。场致相移 Γ 可表示如下：

$$\Gamma = \frac{2\pi n_0^3 \gamma_{41} E l}{\lambda} \quad (4)$$

式中： l 为光束在晶体内传播路径的长度； λ 为光束波长。

在电光调制器中，由于电极直接贴敷在电光晶体的两个端面，在晶体内部产生均匀电场，通过外施电压除晶体厚度可直接求得晶体内部电场 E ，可知式(4)可以描述电光调制器中电光晶体的光束相移。然而实践表明，式(4)并不能有效描述电光传感器中的光束相移。对于电光传感器而言，电光晶体独立地处于布满环境介质的空间电场中。在这种情况下，空间电场会引起晶体介质和环境介质的极化效应并产生退极化场，退极化场 E_d 也会通过电光效应影响晶体的折射率，如图1所示，其中 E_0 为空间电场； E_d 为介质极化在晶体内部引起的退极化场。

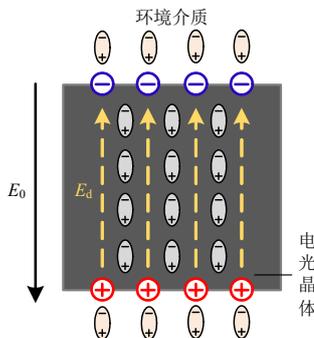


图1 空间电场下晶体与环境介质的极化效应

Fig. 1 Polarization effect of crystal and environmental medium under space electric field

这将导致直接影响晶体折射率的内部电场 E 与空间电场 E_0 并不相同，无法通过式(4)计算出 E_0 的值。因此，研究电光传感器中的光束相移时必须要考虑极化效应作用下晶体内部电场 E 与空间电场 E_0 之间的关联关系。

此外，晶体内部电场的不均匀分布会导致光束沿不同路径传播时所经历的有效折射率不同。所以相移也会受光束传播路径的影响(以光束垂直入射通光面为前提条件)。

综上，考虑晶体与环境介质的极化效应时，相移 Γ 应是相对介电常数与光束传播路径的函数：

$$\Gamma = \frac{2\pi n_0^3 \gamma_{41} \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x_0+l, y_0, z_0)} E(x, y, z, \epsilon_c, \epsilon_e) dl}{\lambda} \quad (5)$$

式中： (x_0, y_0, z_0) 为光束传播路径的空间坐标； E 为电光晶体内部的电场矢量； ϵ_c 和 ϵ_e 分别为晶体和环境介质的相对介电常数。

2 极化效应作用下的光束相移公式

2.1 极化效应下晶体三维电场的解析计算

电光晶体属于电介质，其在空间电场作用下会由于介质极化而在界面处产生面束缚电荷，这些面电荷会在电介质内部产生附加电场，即退极化场^[19-21]。退极化场的大小与介质本身的极化强度相关。根据电场叠加原理，晶体内部任意位置的电场矢量 E 为

$$E = E_0 + E_d(E) \quad (6)$$

式中： E_0 为施加的空间电场矢量； E_d 为极化电荷产生的退极化场矢量。晶体内部电场 E 决定了晶体的极化强度，所以 E_d 是电场 E 的函数。

根据电介质物理理论，在电介质与电场相互作用下，介质极化产生的退极化场 E_d 可表示为面极化电荷产生电场的积分^[22]，如下：

$$E_d(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\sigma}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2} d\mathbf{s} \quad (7)$$

$$\sigma = \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n} \quad (8)$$

式中： \mathbf{r} 为晶体中任意点的空间坐标矢量； \mathbf{r}' 为晶体表面上任意点的坐标矢量，面极化电荷密度 σ 为极化强度与面法向的点积； \mathbf{P} 为介质的极化强度； \mathbf{n} 为晶体表面的单位法向量。

空间电场 E_0 的方向是任意的，可以将其分解为沿坐标轴方向的3个电场分量的叠加。由于这3个电场分量在晶体中引起退极化场的规律是一致

的，本文先研究沿单个坐标轴方向施加电场时晶体的内部电场，再推广至其他两个方向的结果。

以空间电场 E_0 沿晶体 z 轴施加为例进行计算。此时介质极化引起的面束缚电荷集中分布在与 z 轴垂直的晶体界面上，如图 2 所示。设晶体尺寸为 $a \times b \times c$ ，晶体的对称中心为坐标原点 $(0,0,0)$ 。

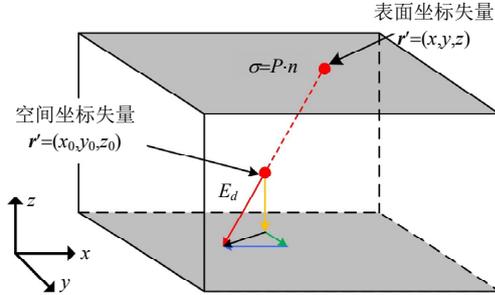


图 2 面极化电荷引起晶体中的退极化场

Fig. 2 Depolarization field in the crystal caused by the surface polarization charge

晶体界面上的面极化电荷既与晶体介质的极化强度有关，也与环境介质的极化强度有关，需要同时考虑晶体和环境介质的极化效应。在界面上，晶体侧的极化强度和环环境介质侧的极化强度可分别表示为：

$$P_c(r') = \epsilon_0(\epsilon_c - 1)E_c(r') \quad (9)$$

$$P_e(r') = \epsilon_0(\epsilon_e - 1)E_e(r') \quad (10)$$

式中 E_e 和 E_c 分别为界面上环境介质侧的电场强度和晶体侧的电场强度。

面极化电荷密度可以表示为

$$\sigma = [P_c(r') - P_e(r')] \cdot e_z \quad (11)$$

基于电场的边界条件，将式(9)、(10)代入式(11)，并用晶体电场 E 取代 E_c ，可得：

$$\sigma = \epsilon_0 \left(\frac{\epsilon_c}{\epsilon_e} - 1 \right) E(r') \cdot e_z \quad (12)$$

将式(12)代入式(7)可得退极化场的表达式：

$$E_d(r) = -\frac{\epsilon_c - \epsilon_e}{4\pi\epsilon_e} \oint_S \frac{E(r') \cdot e_z}{(r - r')^2} ds \quad (13)$$

式(13)难以直接求得解析解，采用一种类似于在退磁化场计算中应用过的级数逼近法进行处理^[23]。构造电场强度 $E(r')$ 在空间坐标 r 处的泰勒级数展开：

$$E(r') = E(r) + \frac{E(r)^{(1)} \cdot (r' - r)}{1!} + \frac{E(r)^{(2)} \cdot (r' - r)^2}{2!} + \dots \quad (14)$$

取电场强度 $E(r')$ 的一阶近似带入式(13)，得：

$$E_d(r) = -\frac{(\epsilon_c - \epsilon_e)E_z(r)}{4\pi\epsilon_e} \oint_S \frac{1}{(r - r')^2} ds \quad (15)$$

式中 $E_z(r)$ 为电场 E 在 z 轴方向的投影。

对式(15)进行推导，可以求得晶体内部退极化场的解析表达式。由于长方体介质极化的界面效应，式(15)中的矢量积分在 3 个坐标轴方向都有结果，即面极化电荷对 E_d 的 3 个分量都有贡献。推导获得退极化场的解析表达式如下：

$$E_d(r) = \begin{bmatrix} E_{dx} \\ E_{dy} \\ E_{dz} \end{bmatrix} = -\frac{(\epsilon_c - \epsilon_e)E_z(r)}{4\pi\epsilon_e} \begin{bmatrix} R_{xz} \\ R_{yz} \\ R_{zz} \end{bmatrix} \quad (16)$$

其中：

$$\begin{cases} R_{zz} = \oint_S \frac{z - z_0}{\|r - r'\|^3} ds = \frac{1}{2} \left[\frac{f_1(A_1, C_1) + f_1(A_2, C_1)}{f_1(A_1, C_2) + f_1(A_2, C_2)} \right] \\ R_{xz} = \oint_S \frac{x - x_0}{\|r - r'\|^3} ds = f_2(C_1) + f_2(C_2) \\ R_{yz} = \oint_S \frac{y - y_0}{\|r - r'\|^3} ds = f_3(C_1) + f_3(C_2) \\ f_1(A, C) = -2 \arcsin \left(\frac{A^2 + C^2}{\sqrt{(A^2 - C^2)^2 + 4A^2C^2}} \right) + \\ \arcsin \left[\frac{(2A^2C^2)/(B_2^2 + C^2) - (A^2 - C^2)}{\sqrt{(A^2 - C^2)^2 + 4A^2C^2}} \right] + \\ \arcsin \left[\frac{2A^2C^2/(B_1^2 + C^2) - (A^2 - C^2)}{\sqrt{(A^2 - C^2)^2 + 4A^2C^2}} \right] \\ f_2(C) = \ln \left(\frac{-B_2 + \sqrt{A_1^2 + C^2 + B_2^2}}{B_1 + \sqrt{A_1^2 + C^2 + B_1^2}} \right) + \\ \ln \left(\frac{B_1 + \sqrt{A_2^2 + C^2 + B_1^2}}{-B_2 + \sqrt{A_2^2 + C^2 + B_2^2}} \right) \\ f_3(C) = \ln \left(\frac{-A_2 + \sqrt{B_1^2 + C^2 + A_2^2}}{A_1 + \sqrt{B_1^2 + C^2 + A_1^2}} \right) + \\ \ln \left(\frac{A_1 + \sqrt{B_2^2 + C^2 + A_1^2}}{-A_2 + \sqrt{B_2^2 + C^2 + A_2^2}} \right) \\ A_1 = a - x_0; A_2 = a + x_0; B_1 = b - y_0; B_2 = b + y_0; \\ C_1 = c - z_0; C_2 = c + z_0 \end{cases}$$

根据式(16)与式(6)可得晶体内部电场 E 的表达式：

$$\begin{cases} E_x = -\frac{R_{xz}E_0}{4\pi\epsilon_e + R_{zz}} \\ E_y = -\frac{R_{yz}E_0}{4\pi\epsilon_e + R_{zz}} \\ E_z = E_0 / \left[1 + \frac{(\epsilon_c - \epsilon_e)}{4\pi\epsilon_e} R_{zz} \right] \end{cases} \quad (17)$$

由式(17)可知,沿z轴方向的空间电场 E_0 不仅会在晶体内部产生z方向的电场 E_z ,还会引起其他两个正交方向的电场 E_x 和 E_y ,它们的幅值受晶体三维尺寸的影响。这表明在非椭球体极化的界面效应影响下,晶体内部电场受空间电场矢量方向的影响,即空间电场方向不同、晶体内部电场不同。

由于空间电场沿x、y坐标轴方向施加时晶体极化效应与z轴的情况类似,且各向同性晶体中3个本征轴方向的相对介电常数相同,可以将式(17)的形式推广至电场沿x、y坐标轴时的情况。对于任意方向的空间电场 $E_0(E_{0x}, E_{0y}, E_{0z})$,晶体内部电场 $E(E_x, E_y, E_z)$ 可表示为

$$E = TE_0 \tag{18}$$

定义张量 T 为电场变换张量:

$$T = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix} \tag{19}$$

张量 T 中的元素是空间坐标的函数,并且与晶体和环境介质的相对介电常数有关。元素 T_{xy} 代表空间电场的y分量在晶体内部某点处引起的x方向的电场分量的比例系数。 T 体现了极化效应作用下空间电场 E_0 与晶体内部电场 E 的变换关系,可表示为

$$T = \begin{bmatrix} 1 & R_{xy} & R_{xz} \\ 1 + \frac{(\epsilon_c - \epsilon_e) R_{xx}}{4\pi\epsilon_e} & \frac{4\pi\epsilon_e}{\epsilon_c - \epsilon_e} + R_{yy} & \frac{4\pi\epsilon_e}{\epsilon_c - \epsilon_e} + R_{zz} \\ R_{yx} & 1 & R_{yz} \\ \frac{4\pi\epsilon_e}{\epsilon_c - \epsilon_e} + R_{xx} & 1 + \frac{(\epsilon_c - \epsilon_e) R_{yy}}{4\pi\epsilon_e} & \frac{4\pi\epsilon_e}{\epsilon_c - \epsilon_e} + R_{zz} \\ R_{zx} & R_{zy} & 1 \\ \frac{4\pi\epsilon_e}{\epsilon_c - \epsilon_e} + R_{xx} & \frac{4\pi\epsilon_e}{\epsilon_c - \epsilon_e} + R_{yy} & 1 + \frac{(\epsilon_c - \epsilon_e) R_{zz}}{4\pi\epsilon_e} \end{bmatrix} \tag{20}$$

至此,推导了一般长方体晶体内部电场的三维解析模型,可计算任意晶体与环境介质、任意尺寸下长方体晶体内部的三维电场。下文将基于晶体内部电场的解析模型,推导出考虑晶体与环境介质极化效应作用下的光束相移公式。

2.2 引入电场变换张量的光束相移公式

根据式(5),电光晶体中的光束相移是局部相移在整个光束传播路径上的线积分。光束在晶体内部传播时的局部相移为

$$d\Gamma = \frac{2\pi n_0^3 \gamma_{41}}{\lambda} Edl \tag{21}$$

将式(18)带入式(21)中可以得到考虑极化效应作用后的局部相移:

$$d\Gamma = \frac{2\pi n_0^3 \gamma_{41}}{\lambda} (TE_0)dl \tag{22}$$

式中 $T(d\Gamma_x, d\Gamma_y, d\Gamma_z)$ 分别表示光束在 dl 上传播时受 E_x, E_y 和 E_z 3个电场分量作用引起的局部相移。

电光晶体中光束总相移为式(22)的积分:

$$\Gamma = \frac{2\pi n_0^3 \gamma_{41}}{\lambda} \int_l (TE_0)dl \tag{23}$$

使用积分中值定理可将通光路径长度 l 从积分式中提出来,获得如下形式的相移公式:

$$\Gamma = \frac{2\pi n_0^3 \gamma_{41} l}{\lambda} T_m E_0 \tag{24}$$

式中 T_m 中的各元素为张量 T 中对应元素在光束传播路径 l 上的积分中值,只与介电常数和晶体几何尺寸有关。

综上,本文提出了考虑极化效应下电光晶体中光束相移的计算方法,同时考虑了晶体以及环境介质的极化过程,建立了晶体内部电场的三维解释公式,定义了描述晶体内部电场与外部空间电场之间关联关系的电场变换张量 T 。基于折射率椭球法,通过引入张量 T 获得了考虑极化效应的光束相移公式。该公式可用于描述任意晶体尺寸、相对介电常数下电光晶体中的光束相移。在第3章中将通过实验对公式的有效性进行验证。

3 计算分析与讨论

3.1 相对介电常数对电光晶体中光束相移的影响

设空间电场平行于晶体的z轴,晶体为立方体,光束沿y轴方向垂直入射于晶体通光面。计算电光晶体相对介电常数 ϵ_c 以及环境介质相对介电常数 ϵ_e 改变时的光束相移(如非特殊说明,本文相移均指与空间电场同向的晶体内部电场分量引起的相移 Γ_z)。 ϵ_c 与 ϵ_e 的取值范围分别是1~50和1~100,可包括绝大多数电光晶体(ZnTe为7、BGO为16、LiNbO₃为50等等)以及传感器应用时的环境介质(空气等各种气体为1、油介质为2~3、水为89等)。图3为相移计算的归一化结果。

由图3可知,相对介电常数对相移的影响是非线性的。随着晶体相对介电常数 ϵ_c 的增加,相移呈现衰减趋势,表明晶体极化所产生的退极化场会导致相移的衰减。相对介电常数越大、晶体内部电场越弱,相移就越小。与晶体不同,环境介质的极化

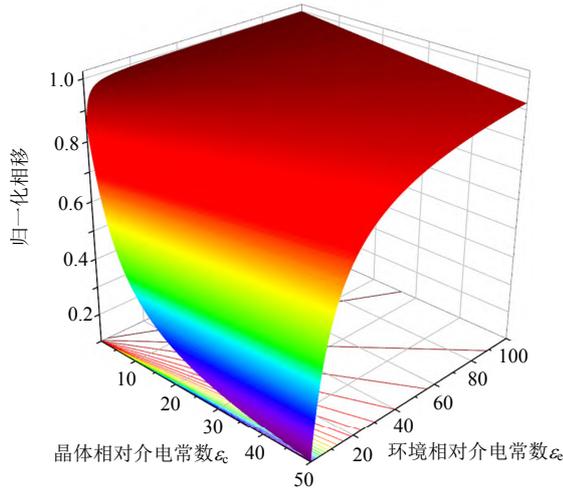


图 3 晶体及环境介质的相对介电常数变化时
光束相移的归一化计算结果

Fig. 3 Normalized calculation result of the phase-shift of the beam when the relative permittivity of the crystal and the environmental medium changes

效应会加强晶体内部电场，随着环境相对介电常数 ϵ_e 的增加，光束相移呈现出上升趋势。不同的 ϵ_e 会导致显著差异，这表明在设计和分析传感器时必须要考虑其具体的应用环境。从图 3 中可以看出，相移曲面的等高线在相对介电常数平面的投影是具有不同斜率的直线，这表明晶体与环境介质的相对介电常数之比是影响相移大小的关键。图 4 所示为晶体与环境介质的介电常数比与相移的关系，其中介电常数比 ϵ_c/ϵ_e 唯一确定了相移，即相移与单一 ϵ_c 或 ϵ_e 的具体数值没有关系，只与它们的比例有关。可以预见，选择介电常数小的电光晶体可获得更大的相移；在高介电常数的环境介质中可获得显著增大的相移。

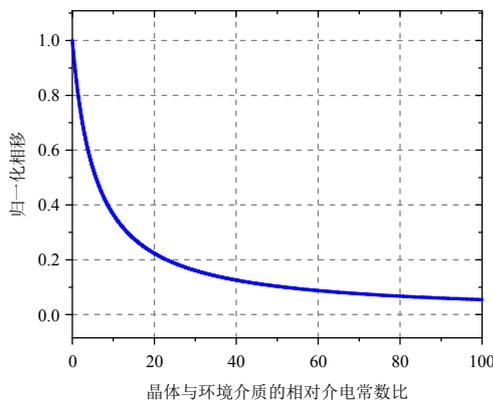


图 4 晶体与环境介质的相对介电常数之比与光束相移
Fig. 4 Relationship between the relative permittivity ratio of the crystal and the environment medium and the phase-shift

品质因数是评估电光晶体的重要参数，直接关系到其用于电场测量的灵敏度。计算了考虑极化效

应后空气中正方体电光晶体的品质因数并与现有计算方法进行对比，如表 1 所示^[13, 16, 24]。对比可以看出，折射率椭球法以及相对介电常数修正的计算结果均存在明显偏差；类比椭球体方法的计算结果与本文结果相近。

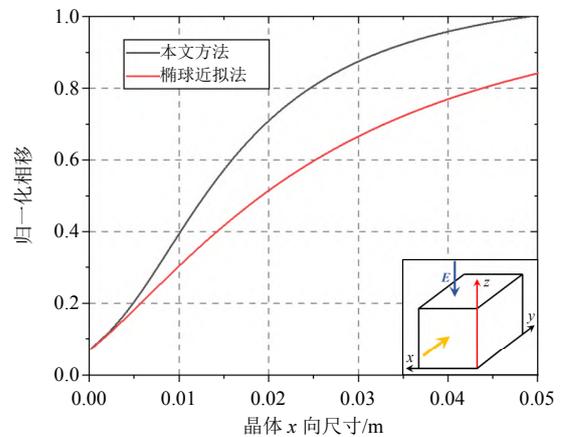
表 1 电光晶体品质因数的评估
Table 1 Evaluation of quality factors for electro-optic crystal

电光晶体	品质因数			pm/V
	折射率椭球法	相对介电常数修正	椭球体近似法修正	
ZnTe	78.7	11.2	26.2	28.7
BGO	9.70	0.61	1.61	1.82
LiNbO ₃	250	5	14.5	16.5

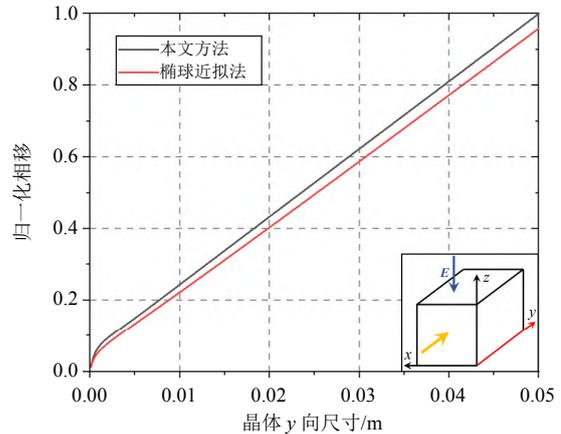
3.2 晶体三维尺寸对电光晶体中光束相移的影响

设空间电场平行于 z 轴，晶体与环境介质的相对介电常数比为 16，光束沿 y 轴方向垂直入射于晶体通光面的几何中心。计算了晶体在 x 、 y 、 z 三个方向尺寸变化时的光束相移(单一方向尺寸变化时其他两个正交方向尺寸固定)。图 5 所示为相移计算的归一化结果。

由图 5 可知，晶体 y 向尺寸与 z 向尺寸的增加，



(a) 晶体 x 向尺寸变化对光束相移的影响



(b) 晶体 y 向尺寸变化对光束相移的影响

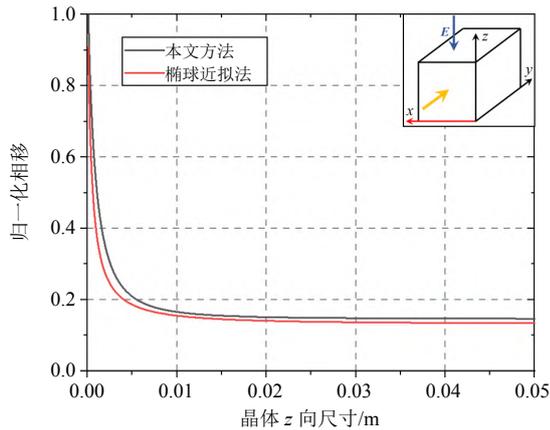
(c) 晶体 z 向尺寸变化对光束相移的影响

图5 晶体三维尺寸变化对光束相移的影响规律

Fig. 5 Influence of the three-dimensional crystal size change on the phase-shift of the beam

会使光束相移增大；而 x 向尺寸的增加反而会使相移减小。对于 y 向尺寸的影响规律可以从原有的式(4)中获得，因为通光路径的增加必然会线性地增大相移。但 z 与 x 向尺寸对光束相移的影响规律在之前的研究中鲜有提及。 z 向尺寸的增加会增大面积极化电荷到光束传播路径的距离，减小路径上的退极化场，使晶体内部电场增加，引起相移的增加； x 向尺寸的增加会增加界面上束缚电荷的总量，增加光束传播路径上的退极化场，引起相移的减小。对于 y 向尺寸的变化，相移整体呈线性增长，但在尺寸较小的区域存在非线性变化。这是因为 y 向尺寸会同时受到两个方面的影响：一方面 y 向尺寸会影响界面面积，通过影响退极化场来改变相移，这一过程与 x 向尺寸的影响规律类似，会非线性地衰减光束相移；另一方面 y 向尺寸决定了光束在晶体中的传播长度，通过改变光路长度线性地影响相移。这两种机制相互制约，导致 y 向尺寸的影响规律在小尺寸区域表现出非线性，在大尺寸区域表现出线性。

通过晶体三维尺寸的研究可以发现，不仅沿光束传播方向的晶体尺寸会对相移产生影响，晶体另外两个方向的尺寸同样会对相移产生显著影响。因此，可以通过对晶体三维尺寸的调节，实现对光束相移的调控，这可为电场传感器的优化设计提供新的思路。此外，图5中将本文方法与椭球体近似法进行了对比，由计算结果可以看出，晶体 x 方向和 y 方向尺寸改变时，本文方法与椭球体近似法的结果较为一致；晶体 z 方向尺寸改变时，椭球体近似法与本文结果相比会产生明显偏差，这是由于椭球体近似法无法描述非椭球形状极化的界面效应。

3.3 光束传播路径对电光晶体中光束相移的影响

设空间电场平行于晶体 z 轴，晶体尺寸为 $10\text{mm}\times 10\text{mm}\times 10\text{mm}$ ，晶体与环境介质的介电常数为 16，光束平行于 y 方向入射。计算光束传播路径沿 x 方向和 z 方向移动时光束相移的变化规律，结果如图6(a)所示，光束路径在 x 、 z 方向上移动时，相移与位移的大小有关。在 x 方向移动时，光束路径靠近两端时相移最大，靠近中点时相移最小；在 z 方向移动时，光束路径靠近两端时相移最小，靠近中点时相移最大。这个特性是由晶体内部电场的不均匀分布引起的。空间电场作用下，晶体与环境介质的极化会在与电场方向垂直的界面处产生面积极化电荷。这些电荷在晶体内部产生的退极化场是不均匀的，其中靠近此界面处的退极化场强、远离时弱。因此，内部电场就会表现出在 z 方向两端最强、在 x 方向两端最强的现象。光束传播路径在整个 xz 面上移动时的相移计算结果如图6(b)中的二维

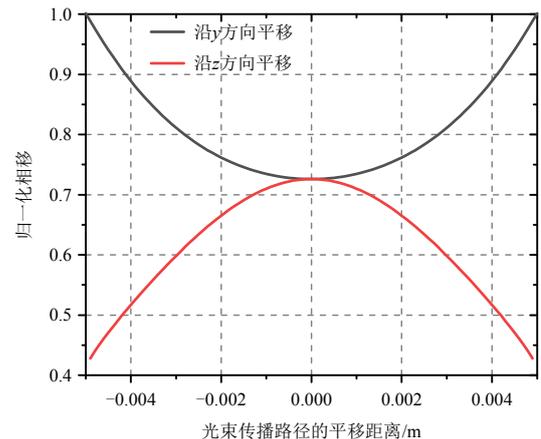
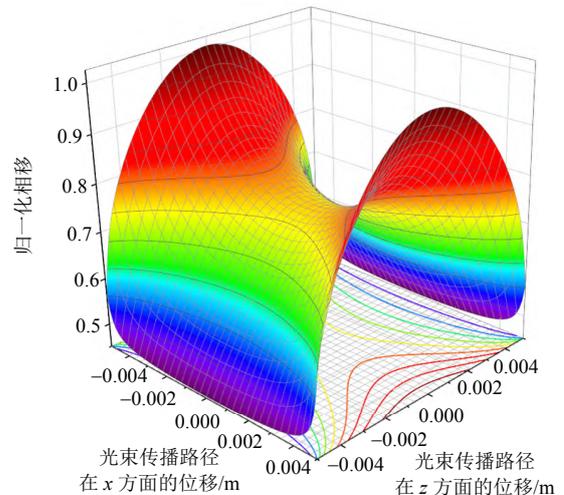
(a) 光束传播路径沿 x 、 z 方向移动时的光束相移(b) 光束传播路径在 xz 面上移动时相移的二维曲面图

图6 光束在电光晶体中的传播路径对相移的影响

Fig. 6 Influence of beam propagation path on phase shift in electro-optic crystal

曲面图所示。相移曲面表现出类似“马鞍面”的形状，表明了面极化电荷在晶体内部引起的不均匀分布的退极化场会对光束相移产生明显影响。在传感器的设计和制作时，必须要考虑到光束传播路径的影响。此外，甚至有望将改变光束路径作为调控传感器测量灵敏度的手段。

此外，光束路径移动时还会产生 Γ_x 、 Γ_y 相移。由于计算中预设光束传播方向与 y 轴方向平行，根据电场分布的对称性，沿传播路径积分后 Γ_y 必然是零。因此只需考虑光束路径在 xz 面上移动时引起的 Γ_x 相移，结果如图 7 所示。可知，当光束路径靠近侧棱角区域时，晶体介质极化会在内部产生与空间电场方向正交的退极化电场，从而引入 Γ_x 相移。要注意，仅按传统的光学公式， z 方向的空间电场只能引起相移 Γ_z ， Γ_x 相移只能是由 x 方向空间电场引起的。而考虑极化效应后， z 方向的空间电场不仅会引起 Γ_z 相移，还会引起 Γ_x 相移。这是因为非椭球体极化不仅会在晶体内部产生与空间电场同向的退极化电场，还会引起 x 、 y 方向的退极化电场分量。这两个特殊的正交电场分量在几何边缘处最大，在中心点处最小，并且在对称性几何结构下也存在对称性。该现象可能会影响到电场传感器的敏感电场方向。因为对于特定调制方式下的电光晶体来说，其具有严格的电场敏感方向，即仅对特定某一方向的电场敏感^[25]。但是 Γ_x 相移的存在就会在调制信号中引入非敏感方向电场的信号，这可能会影响电场传感器在三维电场下的测量精度。对于极化效应作用下电光晶体的电场敏感方向，尚需进一步深入研究。

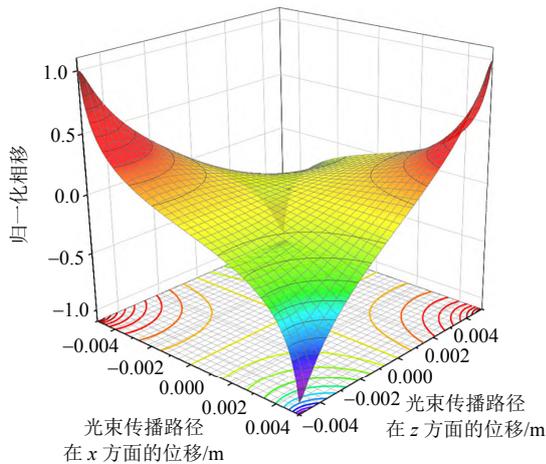


图 7 光束传播路径在 xz 面移动时的 Γ_x 相移

Fig. 7 Phase-shift Γ_x when the beam path moves on the xz plane

最后，以 BGO 晶体为例开展验证性实验。搭建光束传播路径可调的电场测量平台，如图 8 所示。

该平台主要包括 532nm 半导体激光器、起偏器、1/4 波片、BGO 晶体(10mm×10mm×10mm, 110 切)、检偏器和硅光电探测器。本文通过在 x 方向和 z 方向平移 BGO 晶体以改变光束在晶体中的传播路径。实验测量了空气中外施 50Hz 工频电场下 BGO 晶体中的光束相移，将不同光束传播路径时相移的实验测量数据与计算结果进行对比，如图 9 所示。

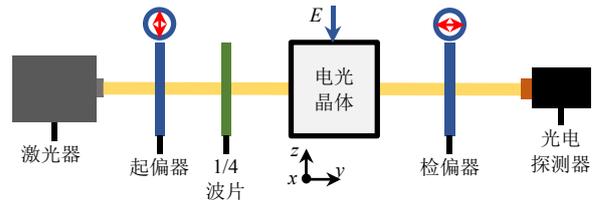


图 8 光束传播路径变化下相移特性的实验平台

Fig. 8 Experimental platform for phase-shift characteristics with beam propagation path changing

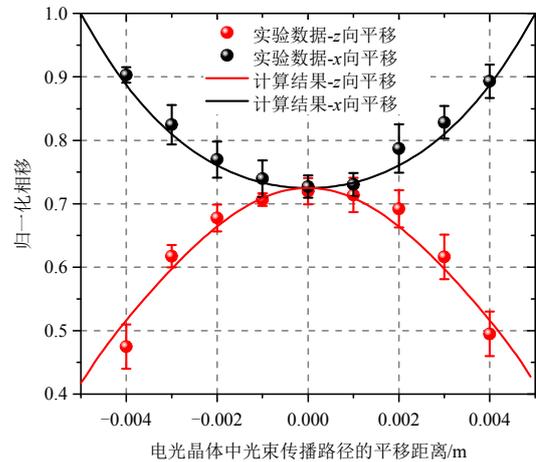


图 9 光束传播路径沿 x 、 z 轴方向移动时的归一化相移

Fig. 9 Normalized phase-shift with the beam propagation path moving along the x and z axis

当光束传播路径沿 z 轴方向移动时，晶体相移呈现先增大后减小的趋势，在处于中心点时相移达到最大。这直接证明了非椭球形状引起的不均匀分布电场会对相移产生明显影响。光束传播路径沿 x 轴移动时相移呈现出先降后升的变化规律，在两端界面处相移达到最大。实验数据与计算结果具有较好的一致性，证明了本文计算方法的有效性。

4 结论

本文提出极化效应作用下长方体各向同性电光晶体中光束相移的解析计算方法，计算分析了相对介电常数、晶体三维尺寸和光束传播路径对电光晶体中光束相移的影响，并开展实验对计算结果进行验证。主要结论如下：

- 1) 晶体与环境介质的相对介电常数均会显著

影响相移,晶体与环境介质的相对介电常数之比是决定相移的关键因素,该比例越大、相移越小。

2)晶体的三维尺寸均会对相移产生显著影响,可以通过对晶体三维尺寸比例的调控以实现电光传感器灵敏度的优化。

3)光束在晶体中的传播路径也会影响到相移幅值,在传感器设计时有必要考虑光束传播路径的影响。

4)以BGO晶体为例开展了验证性实验,验证了本文提出的计算方法的有效性。

本文为深入研究光学电场传感器的响应机理提供了一种有效计算方法,为传感器的优化设计提供了理论依据。

参考文献

- [1] 张宁,马国明,关永刚,等.全景信息感知及智慧电网[J].中国电机工程学报,2021,41(4):1274-1283.
ZHANG Ning, MA Guoming, GUAN Yonggang, et al. Panoramic information perception and intelligent grid[J]. Proceedings of the CSEE, 2021, 41(4): 1274-1283 (in Chinese).
- [2] STRASSER T, ANDRÉN F, KATHAN J, et al. A review of architectures and concepts for intelligence in future electric energy systems[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2015, 62(4): 2424-2438.
- [3] XUE Fen, HU Jun, WANG S X, et al. Electric field sensor based on piezoelectric bending effect for wide range measurement[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2015, 62(9): 5730-5737.
- [4] YAZDANI M, THOMSON D J, KORDI B. Passive wireless sensor for measuring ac electric field in the vicinity of high-voltage apparatus[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2016, 63(7): 4432-4441.
- [5] HIDAKA K. Progress in Japan of space charge field measurement in gaseous dielectrics using a Pockels sensor[J]. IEEE Electrical Insulation Magazine, 1996, 12(1): 17-28.
- [6] SHU Yinbiao, CHEN Weijiang, LI Zhibing, et al. Experimental research on very-fast transient overvoltage in 1100kV gas-insulated switchgear[J]. IEEE Transactions on Power Delivery, 2013, 28(1): 458-466.
- [7] FAN Xing, CHEN Weijiang, ZHANG Qiaogen, et al. An electric field measurement method based on electro-optical modulation for corona discharge in air[J]. Review of Scientific Instrument, 2019, 90(8): 084704.
- [8] HIDAKA K, FUJITA H. A new method of electric field measurements in corona discharge using Pockels device[J]. Journal of Applied Physics, 1982, 53(9): 5999-6003.
- [9] CECELJA F, BORDOVSKY M, BALACHANDRAN W. Lithium niobate sensor for measurement of DC electric fields[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2001, 50(2): 465-469.
- [10] GUTIÉRREZ-MARTÍNEZ C, TRINIDAD-GARCIA G, RODRÍGUEZ-ASOMOZA J. Electric field sensing system using coherence modulation of light[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2002, 51(5): 985-989.
- [11] BULMER C H, BURNS W K, MOELLER R P. Linear interferometric wave-guide modulator for electromagnetic-field detection[J]. Optics Letters, 1980, 5(5): 176-178.
- [12] DUVILLARET L, RIALLAND S, COUTAZ J L. Electro-optic sensors for electric field measurements. I. Theoretical comparison among different modulation techniques[J]. Journal of the Optical Society of America B, 2002, 19(11): 2692-2703.
- [13] DUVILLARET L, RIALLAND S, COUTAZ J L. Electro-optic sensors for electric field measurements. II. Choice of the crystals and complete optimization of their orientation[J]. Journal of the Optical Society of America B, 2002, 19(11): 2704-2715.
- [14] SHE Weilong, LEE W K. Wave coupling theory of linear electrooptic effect[J]. Optics Communications, 2001, 195(1-4): 303-311.
- [15] ZHANG Peng, DU Xiaoping, SONG Yishuo, et al. Phase shift formulas in electro-optical crystals with an arbitrary incident direction[J]. Journal of Physics D: Applied Physics, 2020, 53(9): 095306.
- [16] HIDAKA K, KOUNO T. A method for measuring electric field in space charge by means of pockels device[J]. Journal of Electrostatics, 1982, 11(3): 195-211.
- [17] NEURGAONKAR R R, CORY W K, OLIVER J R, et al. Growth and ferroelectric properties of tungsten bronze Sr_{2-x}CaxNaNb₅O₁₅ single crystals[J]. Materials Research Bulletin, 1988, 23(10): 1459-1467.
- [18] BORDOVSKY M, CECELJA F, BALACHANDRAN B. Comparative study of cubic crystals performance in bulk electro-optic sensor for DC and extra-low-frequency measurements[C]//Proceedings of SPIE 2839, Fiber Optic and Laser Sensors XIV. Denver, CO, USA: IEEE, 1996.
- [19] GARZARELLA A, WU D H. Optimal crystal geometry and orientation in electric field sensing using electro-optic sensors[J]. Optics Letters, 2012, 37(11): 2124-2126.

- [20] MOROZ A. Depolarization field of spheroidal particles [J]. Journal of the Optical Society of America B, 2009, 26(3): 517-527.
- [21] KIM D J, JO J Y, KIM Y S, et al. Polarization relaxation induced by a depolarization field in ultrathin ferroelectric BaTiO₃ capacitors[J]. Physical Review Letters, 2005, 95(23): 237602.
- [22] WURFEL P, BATRA I P. Depolarization-field-induced instability in thin ferroelectric films-experiment and theory[J]. Physical Review B, 1973, 8(11): 5126-5133.
- [23] 马西奎. 电磁场理论及应用[M]. 第二版. 西安: 西安交通大学出版社, 2018: 172-175.
- [24] JOSEPH R I, SCHLÖMANN E. Demagnetizing field in nonellipsoidal bodies[J]. Journal of Applied Physics, 1965, 36(5): 1579-1593.
- [25] HIDAKA K, KOUNO T, HAYASHI I. Simultaneous

measurement of two orthogonal components of electric field using a pockels device[J]. Review of Scientific Instruments, 1989, 60(7): 1252-1257.



樊星

在线出版日期: 2022-01-06。

收稿日期: 2021-08-26。

作者简介:

樊星(1995), 男, 博士研究生, 研究方向为光学电场传感技术、气体电晕放电等, xing_fan@foxmail.com;

*通信作者: 陈维江(1958), 男, 中国科学院院士, 教授级高级工程师, 博士生导师, 主要从事电力系统电磁暂态分析、雷电防护、绝缘配合等方面的研究工作, Weijiang-chen@sgcc.com.cn。

(编辑 胡琳琳)

《中国电机工程学报》再创佳绩

近日,《中国学术期刊影响因子年报》(2022 版)公布,《中国电机工程学报》综合排名持续保持学科第一。年报同时发布了各类期刊评价指标,其中,《中国电机工程学报》在电气工程类期刊中的复合总被引、期刊综合总被引均排名第一,在全部近 5000 种期刊中也名列前茅。

2022 年 12 月 5 日,中国知网发布了 2022 年国际影响力品牌学术期刊榜单(简称“TOP 期刊”),《中国电机工程学报》荣获“中国最具国际影响力学术期刊”(TOP 5%),《中国电机工程学报》的国际影响力指数 CI 值在电力领域中文期刊中持续排名第一,自榜单发布以来已连续 11 年入选 Top5%榜单。

2022 年,《中国电机工程学报》1 篇论文入选第七届中国科协优秀科技论文(孙华东,王宝财,李文锋,杨超,魏巍,赵兵.高比例电力电子电力系统频率响应的惯量体系研究[J].中国电机工程学报,2020,40(16): 5179-5191)。副主编张东霞教高、审稿专家李奇教授荣获 2022 年度中国科技期刊卓越行动计划优秀主编、优秀审稿人荣誉称号。编辑部主任韩蕾受邀参加新华网专访,通过主题为《聚焦能源前沿热点 推动期刊创新发展》的采访分享了期刊的办刊经验,受到业内的广泛关注。

Analytical Calculation of Beam Phase-shift in Cuboid Isotropic Electro-optic Crystal With Polarization Effect

FAN Xing¹, CHEN Weijiang^{2*}, ZHANG Qiaogen¹, ZHAO Jun³, PEI Zhehao¹

(1. State Key Laboratory of Electrical Insulation and Power Equipment (Xi'an Jiaotong University);

2. State Grid Corporation of China; 3. China Electric Power Research Institute)

KEY WORDS: optical electric field sensor; spatial electric field; electro-optic crystal; isotropic; polarization effect; beam phase-shift

The digital construction of new power systems puts forward important requirements for high-performance electric field sensors based on the Pockels effect. The beam phase shift in the electro-optic (EO) crystal is a key factor in determining the sensor response. However, the research on EO crystals so far has mostly focused on the Pockels effect of EO crystals, and the influence of the EO crystal's own polarization effect on the beam phase shift under the action of an electric field has not been fully considered, as a result, the traditional EO modulation model cannot effectively describe the beam phase shift in crystal under the action of polarization effect.

In order to solve this problem, this paper proposes a calculation method for the phase shift of the light beam in a cuboid isotropic EO crystal under the action of polarization effect.

The electric field transformation tensor is defined in this paper to describe the relationship between the electric field inside the crystal and the space electric field under the action of polarization effect, and the analytical formula of the beam phase shift formula incorporating the electric field transformation tensor is deduced by combining the refractive index ellipsoid method. The analytical formula is as follows:

$$\Gamma = \frac{2\pi n_0^3 \gamma_{41} l}{\lambda} T_m E_0 \tag{1}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & R_{xy} & R_{xz} \\ 1 + \frac{(\epsilon_c - \epsilon_e)}{4\pi\epsilon_e} R_{xx} & \frac{4\pi\epsilon_c + R_{yy}}{\epsilon_c - \epsilon_e} & \frac{4\pi\epsilon_e + R_{zz}}{\epsilon_c - \epsilon_e} \\ R_{yx} & 1 & R_{yz} \\ \frac{4\pi\epsilon_e + R_{xx}}{\epsilon_c - \epsilon_e} & 1 + \frac{(\epsilon_c - \epsilon_e)}{4\pi\epsilon_e} R_{yy} & \frac{4\pi\epsilon_e + R_{zz}}{\epsilon_c - \epsilon_e} \\ R_{zx} & R_{zy} & 1 \\ \frac{4\pi\epsilon_e + R_{xx}}{\epsilon_c - \epsilon_e} & \frac{4\pi\epsilon_e + R_{yy}}{\epsilon_c - \epsilon_e} & 1 + \frac{(\epsilon_c - \epsilon_e)}{4\pi\epsilon_e} R_{zz} \end{bmatrix} \tag{2}$$

where T_m is the integral median value on beam path l of the electric field transformation tensor T , and R_{xx} etc. are the geometric factors obtained by integrating the area of the crystal size. For the analytical formula of R_{xx} etc., please refer to the original paper.

The analytical formula also takes into account the

polarization effects of the EO crystal and the ambient medium under the action of the space electric field, and can be used to calculate the beam phase shift in a cuboid isotropic EO crystal with arbitrary three-dimensional dimensions and dielectric properties.

The effects of the relative permittivity, the three-dimensional sizes of crystal and the propagation path of beam on the phase shift in EO crystals are calculated, and the conclusions are as follows:

1) The relative permittivity of crystal and the environment medium will significantly affect the phase shift. The ratio of the relative permittivity of the crystal to the environment medium is the key factor. The larger the ratio, the smaller the phase shift;

2) The three-dimensional size of the crystal will have a significant impact on the phase shift, and the sensitivity of the EO sensor can be optimized by adjusting the three-dimensional size ratio of the crystal;

3) The propagation path of the light beam in the crystal will also affect the phase shift amplitude (Fig. 1). It is necessary to consider the influence of the light beam propagation path when designing the sensor.

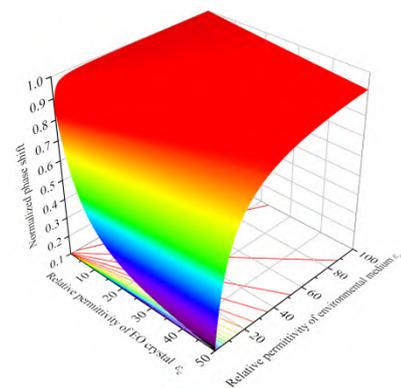


Fig. 1 Effect of relative permittivity on beam phase shift

Finally, a confirmatory experiment was carried out with BGO crystal to verify the calculation method, and the experimental data are in agreement with the calculated results.

This paper provides an effective calculation method for the in-depth study of phase shift of the optical electric field sensor, and provides a theoretical basis for the optimal design of EO sensors, which is of great significance.