

基于克里金模型的边坡稳定可靠度分析方法

罗正东¹, 董 辉¹, 陈 钺¹, 苏永华²

(1. 湘潭大学 土木工程与力学学院, 湖南 湘潭 411105; 2. 湖南大学 岩土工程研究所, 湖南 长沙 410082)

摘 要: 边坡工程的复杂性不仅表现为各岩土参数的变异性而非确定性, 而且还在于其极限状态功能函数的非解析性及隐式性。以 Janbu 法为例, 研究了隐式功能函数下易于执行的边坡工程稳定可靠度计算方法。首先, 调用边坡极限平衡模式获得岩土基本参数, 并利用拉丁超立方试验设计抽取影响边坡稳定性基本参数的适量初始样本。其次, 采用地质统计学中的克里金 (Kriging) 各向异性关联映射方法, 将边坡功能函数值表述为随机过程。然后, 结合主动学习方法, 基于搜索规则调整训练样本, 通过反复迭代循环确定满足实际工程精度的随机过程所表示的边坡功能函数。最后, 调用随机过程函数通过验算点法 (JC 法) 获得边坡的失效概率。工程算例分析表明, 文中方法的求解精度与蒙特卡洛模拟方法相当, 但计算过程简明, 效率高, 更具工程实用性。

关 键 词: 边坡工程; 克里金 (Kriging) 模型; 拉丁超立方设计; 最可能失效区域; 主动学习

中图分类号: U 416

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598-(2015) 增 1-0439-06

An analytic method for slope stability reliability based on Kriging model

LUO Zheng-dong¹, DONG Hui¹, CHEN Cheng¹, SU Yong-hua²

(1. School of Civil Engineering and Mechanics, Xiangtan University, Xiangtan, Hunan 411105, China;

2. Institute of Geotechnical Engineering, Hunan University, Changsha, Hunan 410082, China)

Abstract: The complexity of slope engineering is not only reflected in the variability of geotechnical parameters, but also in the implicit and nonanalytic properties of the performance function. Therefore, the direct calculation of slope stability reliability under implicit performance function that based on Janbu method is researched. First, the slope limit equilibrium model is called to obtain basic geotechnical parameters, and then the initial samples that affect slope stability is acquired through the Latin hypercube sampling. Secondly, using the Kriging anisotropic association mapping method dependence mapping method, the slope function value is expressed as a function of the random process. Then combined with the active learning method, and based on the searching rules to adjust the training samples, the slope performance functions denoted by the random process that meet the accuracy of the actual project is determined through iterative cycle. Finally, the random process function is called to work out the failure probability of slopes through the checking point method (JC method). The case study shows that the accuracy of the proposed method is equivalent to that of the Monte Carlo simulation; but the calculation process is simple, highly efficient, and more practicable.

Keywords: slope engineering; Kriging model; Latin hypercube design; most failure zone; active learning

1 引 言

由于边坡结构力学参数及破坏模式的复杂性及不确定性, 采用可靠度分析方法对边坡的稳定性进行评估是目前较为理想的解决途径, 其研究近年来取得了较为理想的成果^[1-2], 并发展了一些近似模

型方法来对隐式功能函数进行显示化表达诸如响应面法、神经网络法、支持向量机 (SVM) 等, 但这些方法在使用过程中均存在一定的限制条件^[3-5]。

源于地质统计学的 Kriging 模型是一种只需已知部分信息, 而模拟某点待求信息的半参数化插值技术, 与传统代理模型相比, Kriging 模型最主要的

特征是其不需要给出模拟函数的形式, 能避免多项式函数对结构后续求解计算产生的影响, 而且其使用非常灵活方便。2005 年 Kaymaz^[6]首次将 Kriging 模型与一次二阶矩分析法结合求解结构的可靠度指标。Won 等^[7]结合自适应序列样本方案与 Kriging 模型, 解决了基于可靠度的优化设计问题。苏永华等^[8]利用 Kriging 代理模型, 对边坡的稳定可靠度进行了分析研究。

在 Kriging 代理模型的拟合过程中必须已知一定数量的初始样本点, 抽取的训练样本点代表性强弱将直接影响求解结果的准确性。Kriging 代理模型典型的试验设计方法是拉丁超立方设计^[9], 但该方法的拟合精度依赖于样本点的数量, 样本点越多其精度越高, 计算量也随之增大。主动学习方法^[10]能主动搜索最佳训练样本点, 并将其逐渐加入已知样本中, 使样本集不断更新, 进而使 Kriging 代理模型迅速达到预期的预测精度。

为充分考虑边坡功能函数的复杂性及高度非线性的基本特征, 本文在现有的研究基础上通过引进 Kriging 代理模型, 采用具有主动侦测能力的主动学习和具有布满整个空间、不含重复点的拉丁超立方抽样进行互补和联合来抽取样本点, 建立了一种高效的边坡稳定可靠度求解方法。

2 边坡极限状态功能函数的特征

边坡稳定性分析已发展了多种方法和理论, 但极限平衡分析法仍为当前边坡稳定性分析的主要方法^[11]。根据边坡结构的失稳模式及其地质特征, 常用的极限平衡分析法大体可归为两类: 一类是适合于圆弧形滑动面的瑞典法、Bishop 法等, 另一类是适合于任意滑动面的 Janbu 法、Spencer 法、Sarma 法等。在边坡的稳定可靠度研究中, 需以极限平衡分析法为基础展开分析, 本文选取适合于任意滑动面的 Janbu 法为例来展示基于 Kriging 代理模型的可靠度分析方法。

Janbu^[12] 提出其求解边坡结构安全系数的表达式为

$$F_s = \frac{\sum \frac{1}{m_{\alpha_i}} (c_i b_i + (W_i + \Delta X_i) \tan \varphi_i)}{\sum (W_i + \Delta X_i) \sin \alpha_i} \quad (1)$$

式中:

$$m_{\alpha_i} = \cos \alpha_i \left(1 + \frac{\tan \varphi_i \tan \alpha_i}{F_s} \right) \quad (2)$$

由于 m_{α_i} 中含有稳定性系数 F_s , 则稳定性系数求解式 (1) 为隐式函数, 而且为非线性。然而边坡可靠度求解过程中, 功能函数的建立是以稳定性系数为基础的, 即

$$Z = F_s - 1 \quad (3)$$

显见, 边坡稳定极限状态功能函数也属于非线性隐函数, 不便于利用传统的分析方法来求解其可靠度。

3 隐式功能函数值的代理方程

3.1 Kriging 随机过程代理模型

源于地质统计学的 Kriging 代理模型^[13], 是一种基于随机过程的统计预测方法, 以已知样本信息的动态构造为基础, 充分考虑了变量在空间上的相关特性, 建立近似函数模拟对象问题在某一点的未知信息, 具有平滑效应及估计方差最小的统计特征^[6]。Kriging 代理模型的响应值与自变量间的对应关系为式 (4) 由回归部分及随机过程两部分组成。

$$y(x) = F(\theta, x) + z(x) = f(x)^T \theta + z(x) \quad (4)$$

式中: $f(x)$ 为回归模型, 提供模拟的全局近似, 一般采用多项式进行表征; θ 为回归系数; $z(x)$ 为均值, 为 0; 方差为 σ_z^2 的随机过程, 插值点 x_i 与 x_j 的协方差常表示为

$$\text{COV}(z(x_i), z(x_j)) = \sigma_z^2 R(\eta; x_i, x_j) \quad (5)$$

式中: x_i 、 x_j 分别为训练样本的第 i 与第 j 个分量; $R(\eta; x_i, x_j)$ 为带有参数 η 的相关函数, 其表示训练样本点间的空间相关性, 相关函数有多种, 最常用的是高斯相关函数:

$$R(\eta; x_i, x_j) = \exp \left[-\sum_{k=1}^{N_{dv}} \eta_k (x_i - x_j)^2 \right] \quad (6)$$

式中: N_{dv} 为已知设计变量数; η_k 为向量 η 的第 k 个元素。

给定已知训练样本 $S = [x_1, x_2, \dots, x_i]$ 及其真实响应值 $Y = [y_1, y_2, \dots, y_i]$ (i 为训练样本的容量), 则任意待测点 x_{new} 的估计值可表示为

$$\hat{y}(x_{\text{new}}) = f^T(x_{\text{new}}) \hat{\theta} + r(x_{\text{new}}) R^{-1} (Y - F \hat{\theta}) \quad (7)$$

式中: R 为由 $R(\eta; S)$ 构成的对角元为 1, 大小为 $i \times i$ 的对称矩阵; F 为由 i 个样本点处的回归模型组成的 i 维向量; $f(x_{\text{new}})$ 为回归多项式, 一般采用不高于二阶的多项式, 实际操作中由具体工程情况来确定; $r(x_{\text{new}})$ 为训练样本与待测点间的相关向量, 其表达

式为

$$\mathbf{r}(x_{\text{new}}) = [R(\boldsymbol{\eta}; x_{\text{new}}, x_1), \dots, R(\boldsymbol{\eta}; x_{\text{new}}, \dots, x_i)] \quad (8)$$

极大似然估计因子：

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{F}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Y} \quad (9)$$

在高斯过程的假设下，相关模型需要通过求解未知量 $\boldsymbol{\eta}$ 来构造最优Kriging模型。据极大似然估计可得

$$\hat{\sigma}_z^2 = \frac{1}{m} (\mathbf{Y} - \mathbf{F} \hat{\boldsymbol{\theta}})^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{F} \hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad (10)$$

其中 $\boldsymbol{\eta}$ 可通过解：

$$\text{Min: } \phi(\boldsymbol{\eta}) = |\mathbf{R}(\boldsymbol{\eta}; \mathbf{S})|_m^{\frac{1}{m}} \cdot \hat{\sigma}_z^2 \quad (11)$$

的优化问题获得。

3.2 Kriging 随机过程代理模型

依据前述Kriging模型的原理，取功能函数近似显示表达式为式 (4)，将边坡稳定性的影响参数表述为随机变量 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_j]$ ，则功能函数 Z 的近似表达式为

$$\hat{Z} = \hat{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^T(\mathbf{x}) \hat{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{r}(\mathbf{x}) \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{F} \hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad (12)$$

首先给定容量为 i 的边坡参数训练样本 $\mathbf{S} = [x_1, x_2, \dots, x_i]$ ，代入极限平衡方程中获取样本的真实响应值 $\mathbf{S} = \mathbf{Z} = [Z_1, Z_2, \dots, Z_i]$ ，由式 (8) ~ (11) 得到功能函数的近似表达式 (11) 中各待求系数，并取回归多项式 $f(\mathbf{x})$ 为 0 阶^[14]，则可得到边坡功能函数的 Kriging 随机模型：

$$\hat{Z} = \hat{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{r}(\mathbf{x}) \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{1} \hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad (13)$$

式中： $\mathbf{1}$ 为元素为 1 长度为 i 的向量。

功能函数 Z 与其 Kriging 预测值 $\hat{Z}$ 之间的最小均方误差可表示^[15]为

$$\sigma_z^2(\mathbf{x}) = \sigma_z^2 [1 + \mathbf{u}(\mathbf{x})^T (\mathbf{I}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{I})^{-1} \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{r}(\mathbf{x})^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r}(\mathbf{x})] \quad (14)$$

式中： $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{1}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r}(\mathbf{x}) - 1$ 。

4 拉丁超立方试验设计

构造 Kriging 随机过程代理模型需要功能函数 Z 的训练样本，实际边坡工程很难由试验获得全部参数样本值，因此需要通过试验设计抽样法来抽取随机变量的样本数据。试验设计方法有多种，本文

选取拉丁超立方试验设计^[16] (LHS) 抽取需要的样本。这种方法是一种“充满空间”的抽样方法，即使试验样本点相对均匀地散布于整个试验范围之内，并且每个水平只使用一次。

拉丁超立方试验设计作为一种改进的蒙特卡洛抽样方差缩减技术，其抽样的均匀性得到了极大体现，该试验设计方法的基本原理为

输出变量：

$$y = f(\mathbf{x}) \quad (15)$$

式中： $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_k]^T$ 为输入变量构成的向量，每个输入变量 x_k ($k=1, 2, \dots, K$, K 为自变量数) 对照一个分布函数 $F_{x_k}(\mathbf{x})$ ， $f(\mathbf{x})$ 为确定性分析模型。输入变量样本 $\{x\}$ 的选取方式如下：将每个变量 x_k 的概率分布函数 $F_{x_k}(\mathbf{x})$ 取值范围划分为 N (为模拟样本数) 个区间 S_{kn} ($n=1, 2, 3, \dots, N$)，然后在各区间内进行等概率独立抽样，各区间的概率为

$$P_{kn} = P(x_k \in S_{kn}) \quad (16)$$

并能满足条件 $\sum P_{kn} = 1$ ($k=1, 2, \dots, K$)。抽样时各区间均有其代表性的参数，一般在区间重心处进行抽样。在抽样过程中，先在 (0, 1) 内产生 N 个随机数 U ，然后将这 N 个随机数按式 (16) 转换成区间内随机数：

$$U_n = \frac{U}{N} + (n-1)/N \quad (17)$$

式中： U 为在区间 (0, 1) 内生成的随机参数； U_n 则为相应的第 n 个区间内的随机数。从式 (17) 可知，每个区域内均只产生一个值，因为

$$(n-1)/N < U_n < n/N \quad (18)$$

式中： n/N 为第 n 个区间的上边界； $(n-1)/N$ 为第 n 个区间的下边界。

5 主动搜索最可能失效的区域

5.1 主动学习搜索规则

主动学习法是由 Lewis 等^[17]提出，学习过程中依据一定的标识策略，从未标识的数据样本库中选择对分类器最为有利的样本进行进一步训练，从而实现用最少的样本点来实现尽可能高的分类精度。

主、被动学习间的差异在于具体实施过程中主动学习须和外界进行信息交互，通过交互过程中反馈的信息来更新初始训练样本，而被动学习则依靠学习器自身，二者的差异见图 1。

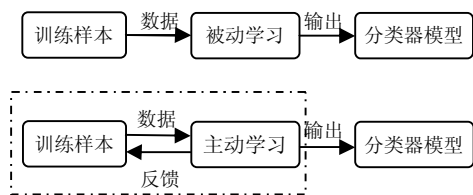


图1 主动学习与被动学习流程

Fig.1 Flow of active learning and passive learning

5.2 主动学习中学习函数的构建

边坡稳定分析极限状态功能函数,以功能函数 $Z=0$ 构建的曲面作为分界面,将训练样本分为 $Z \leq 0$ 及 $Z > 0$ 两部分。决定 Kriging 代理模型拟合精度的关键在于对 $Z=0$ 曲面附近参数样本点的拟合精度,即对这些点函数值的准确预测,这些点被称为危险点。

危险点具有 2 个显著的特征:(1)十分逼近 $Z=0$ 曲面,即 $|\hat{Z}(x)|$ 值接近 0;(2)对应的 Kriging 模型方差 $\sigma_z^2(x)$ 值比较大,因此可以通过构造学习函数 $L(x)$ 来考虑这 2 个特征^[15]:

$$|\hat{Z}(x)| - L(x) \sigma_z^2(x) = 0 \quad (19)$$

$L(x)$ 可以用来测试 Kriging 代理模型在边坡 $Z=0$ 曲面附近预测出错的概率。从样本池中辨识出少量训练样本构建起初始 Kriging 代理模型,然后通过寻找符合 $\min L(x)$ 的训练样本点并加入训练样本集之中,从而达到更新样本集的目的。

拟合好的 Kriging 代理模型,需要另取样本点来检验拟合模型的精度,以确保其精确性和有效性,经验证后的 Kriging 代理模型才能用作代理模型进行隐式函数的近似分析,常用检验方法有多种^[18],本文选取较易操作的平均相对误差法来进行验证,其表达式为

$$err = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|y(x) - \hat{y}(x)|}{|y(x) + \varepsilon|} \quad (20)$$

式中: N 为总的误差取样点; $\hat{y}(x)$ 与 $y(x)$ 分别为函数的预测值与精确值,当 $|y(x)| = 0$ 时 $\varepsilon = 0.01$, $|y(x)| \neq 0$ 时 $\varepsilon = 0$,平均相对误差取为 0.01 即可满足实际工程需求。

5.3 边坡可靠度的搜索法执行步骤

融合 Kriging 模型、LHS 方法及主动学习搜索法的边坡可靠度分析方法的实施步骤:

① 根据实际边坡工程特征,确定影响其稳定性的随机变量 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 。

② 利用 LHS 方法抽取少量样本作为初始训练样本 S ,代入极限平衡法得到样本的响应值(本文采用 Geo-Studio 软件中 Slope/W 模块进行求解,响应值采用最小安全系数)。

③ 依据章节 3.1~3.2 方法,采用初始训练样本及其响应值建立边坡功能函数的初始 Kriging 模型,根据式(13)对样本点的功能函数值进行预测,利用式(20)求解相对误差值。

④ 主动学习:搜索下一个最佳训练样本点 x^* ,不断更新训练样本,提高 Kriging 模型对功能函数的预测精度。

⑤ 将 x^* 代入极限平衡法得其真实响应值,使训练样本 S 得到更新,建立新的 Kriging 模型,不断重复步骤④~⑤,直到满足平均相对误差小于 0.01 便可停止主动学习。

⑥ 由 LHS 方法及主动学习搜索出的样本构建最优的 Kriging 模型,最后采用 JC 法^[1]求解边坡的失效概率 P_f 。

6 算例分析

已知某土坡^[19]剖面几何形状如图 2 所示。土坡包含 2 个土层,其重度均为 19 kN/m^3 。设土层的黏聚力 c 及内摩擦角 φ 为相互独立的正态随机变量,其分布特征见表 1,以 Janbu 法为基础进行求解。

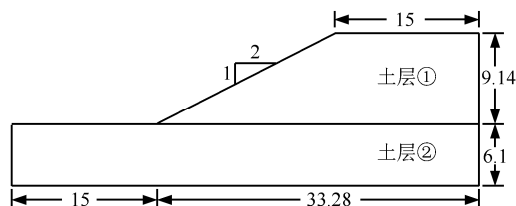


图2 边坡剖面图(单位: m)

Fig.2 Geometry of slope (unit: m)

表1 土层物理力学性质及统计特征

Table 1 Physico-mechanical properties and statistical characteristics of soil layers

土层	c / kPa		$\varphi / (^\circ)$	
	均值	标准差	均值	标准差
①	38.31	7.66	0	0
②	23.94	4.79	12	1.2

首先,通过拉丁超立方试验设计抽取的 20 组初始训练样本及其对应的功能函数值。然后以这 20 组初始训练样本建立初始 Kriging 模型,依据章节

5.2 叙述，展开主动学习，当样本数更新至 42 组时满足平均相对误差小于 0.01 的要求，认为此时的 Kriging 模型精度已满足工程需求。最后，采用 JC 法求得该边坡的失效概率 $P_f = 1.62 \times 10^{-2}$ ，求解结果见表 2。

表 2 算例求解结果对比
Table 2 Comparison results for example

计算方法	计算量 /次	失效概率 P_f	可靠度指标 β	相对误差 /%
Monte Carlo	2×10^5	0.014 7	2.178	
响应面法	23	0.022 3	2.008	7.81
本文方法	42	0.016 2	2.139	1.79

由表 2 可知，当以直接 Monte Carlo 法计算 2×10^5 次所得结果为近似精确解时，本文方法计算得到的边坡稳定可靠度指标相对误差为 1.79%，计算精度高于传统响应面法的求解精度，基本能满足工程实际要求，但边坡稳定极限平衡分析计算工作量与传统响应面法相当，且远小于 Monte Carlo 算法，尤其在复杂的隐式功能函数可靠度分析中将得到较好的体现。

7 结 语

以 Janbu 模型为例，利用 Kriging 随机过程的统计预测方法，并结合拉丁超立方试验设计，导出了边坡功能函数值的随机过程代理模型。

引入主动学习搜索规则及收敛准则，提出了边坡功能函数替代方程的更新迭代程序。建立了在最可能失效区域中依替代随机过程方程的验算点法求解失效概率的方法，该方法在失效概率计算中不需要直接调用原功能函数，计算过程简单明了。

在详细归纳出上述方法的操作执行过程基础之上，通过工程应用分析，表明该方法求解过程简明，效率高，更具工程实用性。

参 考 文 献

- [1] 苏永华, 赵明华, 蒋德松, 等. 响应面方法在边坡稳定可靠度分析中的应用[J]. 岩石力学与工程学报, 2006, 25(7): 1417—1424.
SU Yong-hua, ZHAO Ming-hua, JIANG De-song, et al. Application of response surface method to reliability analysis of slope stability[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2006, 25(7): 1417—1424.
- [2] 何婷婷, 尚岳全, 吕庆, 等. 边坡可靠度分析的支持向量机法[J]. 岩土力学, 2013, 34(11): 3269—3276.
HE Ting-ting, SHANG Yue-quan, LÜ Qing, et al. Slope reliability analysis using support vector machine[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2013, 34(11): 3269—3276.
- [3] KRISHNAMURTHY T. Comparison of response surface construction methods for derivative estimation using moving least squares, Kriging and radial basis functions[R]. Austin: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2005.
- [4] GOMES H M, AWRUCH A M. Comparison of response surface and neural network with other methods for structural reliability analysis[J]. *Structural Safety*, 2004, 26(1): 49—57.
- [5] CHERKASSKY V, MA Y. Practical selection of SVM parameters and noise estimation for SVM regression[J]. *Neural Networks*, 2004, 17(1): 113—126.
- [6] KAYMAZ I. Application of Kriging method to structural reliability problems[J]. *Structural Safety*, 2005, 27(2): 133—151.
- [7] WON J, CHOI C, CHOI J. Improved dimesion reduction method in uncertainty analysis using Kriging interpolation[J]. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2009, 23(5): 1249—1260.
- [8] 苏永华, 罗正东, 张盼凤, 等. 基于 Kriging 的边坡稳定可靠度主动搜索法[J]. 岩土工程学报, 2013, 35(10): 1863—1869.
SU Yong-hua, LUO Zheng-dong, ZHANG Pan-feng, et al. Active searching algorithm for slope stability reliability based on Kriging model[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2013, 35(10): 1863—1869.
- [9] SIMPSON T W, LIN D K J, CHEN W. Sampling strategies for computer experiments: Design and analysis[J]. *International Journal of Reliability and Applications*, 2002, 2(3): 209—240.
- [10] GIUSEPPE R, DILEK H T. Active Learning: Theory and applications to automatic speech recognition[J]. *IEEE Transactions on Speech and Audio Proecessing*, 2005, 13(4): 504—511.
- [11] 孔令伟, 陈正汉. 特殊土与边坡技术发展综述[J]. 土木工程学报, 2012, 45(5): 141—161.
KONG Ling-wei, CHEN Zheng-han. Advancement in the

- techniques for special soils and slopes[J]. **Chinese Civil Engineering Journal**, 2012, 45(5): 141—161.
- [12] JANBU N. Slope stability computations[C]//Proceedings of Embankment Dam Engineering. New York: John Wiley and Sons, 1973: 47—86.
- [13] JONES D R, SCHONLAU M, WELCH W J. Efficient global optimization of expensive black-box functions[J]. **Journal of Global Optimization**, 1998, 13(4): 445—492.
- [14] SOREN N L, HANS B N, JACOB S. Aspects of the matlab toolbox DACE[R]. Denmark: Technical University of Denmark, 2002.
- [15] ECHARD B, GAYTON N, LEMAIRE M. AK-MCS: An active learning reliability method combining Kriging and Monte Carlo simulation[J]. **Structural Safety**, 2011, 33(2): 145—154.
- [16] MCKAY M D, BECKMAN R J, CONOVER W J. Acomparis on of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code[J]. **Technometrics**, 1979, 21(2): 239—245.
- [17] LEWIS D, GALE W.A. A sequential algorithm for training text classifiers[C]//Proceedings of the 17th Annual International ACM SIGIR Conference on Research and Development in Information Retrieval. Dublin, Ireland: [s. n.], 1994: 3—12.
- [18] 谢延敏. 基于 Kriging 模型和灰色关联分析的板料成形工艺稳健优化设计研究[D]. 上海: 上海交通大学, 2007.
- [19] HASSAN A M, WOLFF T F. Search algorithm for minimum reliability index of earth slopes[J]. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**, 1999, 125(4): 301—308.