

文章编号: 1000-7598 (2010) 03-0683-07

考虑渐近状态特性的超固结土本构模型

罗 汀, 侯 伟, 姚仰平

(北京航空航天大学 交通科学与工程学院, 北京 100191)

摘 要: 基于超固结土的 UH 模型, 结合渐近状态概念, 将适用于饱和砂土的渐近状态本构模型推广为考虑渐近状态特性的超固结土本构模型, 用于描述土的超固结性和渐近状态特性。通过采用变换应力方法实现了模型的三维化。新提出的本构模型简单、参数较少, 与剑桥模型相比, 仅增加了一个材料参数, 即伏斯列夫面斜率。该模型能够合理反映超固结土的硬化、软化、临界状态、剪缩、剪胀、应力路径依赖性、渐近状态等特性。

关 键 词: 渐近状态; 超固结土; 本构模型; 三维

中图分类号: TU 41

文献标识码: A

An asymptotic state constitutive model for overconsolidated clays

LUO Ting, HOU Wei, YAO Yang-ping

(School of Transportation Science and Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China)

Abstract: Based on UH model for overconsolidated (OC) clays and the concept of asymptotic state, an asymptotic state constitutive model for saturated sand is developed to be an asymptotic state constitutive model for overconsolidated clays to describe the overconsolidated and asymptotic state behaviors of clays. The proposed model can be applied conveniently to three-dimensional stress states by using transformed stress method. Compared with Cam-clay model, the proposed model is simple, and it only requires one additional soil parameter which is the slope of the Hvorslev envelope. The model can model many characteristics of clays well, including strain hardening and softening, critical state, stress dilatancy, path dependency, and asymptotic state behaviour.

Key words: asymptotic state; overconsolidated clays; constitutive model; three-dimension

1 引 言

天然土体一般具有超固结性质。与正常固结土相比, 超固结土具有剪缩、剪胀、硬化和软化等特性。同时, 天然地基中的土体通常是在某种约束下受力而发生变形的, 该变形约束条件将使土体产生不同的应力-应变规律, 最终达到某一个极限值, 即渐近状态。为了合理地描述天然土的超固结性和渐近状态特性, 国内外学者分别在这两个方面作了诸多的研究工作。Pender^[1]在深入认识超固结土变形机制的基础上提出了超固结土本构模型。Dafalias 等提出了边界面模型^[2], 用来描述超固结土的特性; 在边界面理论的框架下, Hashiguchi 等提出了下加载屈服面的概念, 并将其应用于金属材料 and 岩土材料的本构模型中^[3]。Asaoka 等将下加载面的概念与剑桥模型相结合^[4], 并提出了上加载面概念, 将其

应用于超固结土和结构性土, 以反映其应力-应变特性^[5]; 渐近状态的概念最早是由 Gudehus 等^[6]提出的。Chu 和 Lo^[7]根据大量的试验研究结果得出了渐近状态线的表达式。由于目前的研究成果主要是对超固结性和渐近状态特性分别进行研究, 故不能从本质上揭示两者的共同作用对土的变形特性的影响。

姚仰平等提出了超固结土模型^[8-9], 该模型能够反映超固结土的硬化、软化、临界状态、剪缩、剪胀和应力路径依赖性等特性。与剑桥模型相比, 该模型仅增加一个材料参数, 即伏斯列夫面斜率 M_h , 它可通过常规试验较容易地确定。针对土的渐近状态性质, 作者等在深入研究不同路径条件下的试验结果基础上, 通过考虑部分塑性体积应变与塑性剪应变耦合作用, 提出了考虑土渐近状态特性的本构模型^[10], 它可以同时描述应力路径和应变路径对变

收稿日期: 2009-06-25

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No. 50879001, No. 10872016, No. 90715035)。

第一作者简介: 罗汀, 女, 1957 年生, 博士, 副教授, 主要从事土的基本特性和本构模型研究。E-mail: tluo@buaa.edu.cn

形特性的影响。本文基于超固结土的 UH 模型, 结合渐近状态概念, 将适用于饱和砂土的渐近状态模型推广为考虑渐近状态特性的超固结土本构模型, 以描述超固结土在不同路径下的应力-应变特性。

2 建立考虑渐近状态特性的超固结土本构模型

2.1 模型的屈服面

为了反映超固结土在整个应力变化过程中超固结程度会逐渐减弱的趋势, 采用参考屈服面和当前屈服面来描述。参考屈服面为参考应力点 B 所在的屈服面; 当前屈服面为当前应力点 A 所在的屈服面, 如图 1 所示。

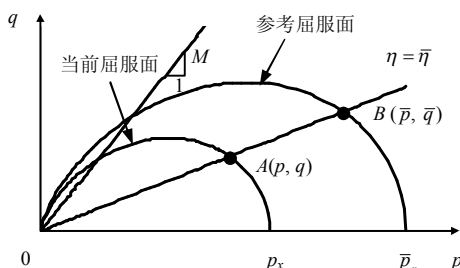


图 1 当前屈服面和参考屈服面

Fig.1 Current yield surface and reference yield surface

通过在参考屈服面和当前屈服面的硬化参数中考虑部分塑性体积应变的影响, 来描述土的渐近状态特性。当前屈服面可表示为

$$f = (1-\mu)c_p \ln \frac{p}{p_{x0}} + c_p \ln \left(1 + \frac{\eta^2}{M^2} \right) - H^c = 0 \quad (1)$$

式中: p 为当前应力点上的平均主应力; q 为该点上的广义剪应力; p_x 为当前屈服面与 p 轴的交点; p_{x0} 为初始状态时的当前屈服面与 p 轴的交点; $c_p = (\lambda - \kappa) / (1 + e_0)$; λ 为等向压缩线的斜率; κ 为等向回弹线的斜率; e_0 为初始孔隙比; M 为特征状态和临界状态应力比; η 为应力比; 耦合硬化参量 H^c 可表示为^[11-13]:

$$H^c = \int \frac{M_f^4 - \eta^4}{M^4 - \eta^4} d\varepsilon_v^{pc} \quad (2)$$

为了合理地描述超固结土在等向条件下的特性, 将非耦合的硬化参量 H^{unc} 表示为^[10]:

$$H^{unc} = \int \frac{M_f^4}{M^4} d\varepsilon_v^{punc} = \int \mu c_p \frac{1}{p} dp \quad (3)$$

式中: 对于黏土, $\mu = 1 - \lambda M / [3(\lambda - \kappa)]$, μ 为耦合参量, 见文献[10, 14]。潜在强度 M_f 的表达式为^[8]:

$$M_f = \left(\frac{1}{R} - 1 \right) (M - M_h) + M \quad (4)$$

式中: M_h 为伏斯列夫面的斜率; R 为超固结参数。

参考屈服面的表达式为

$$\bar{f} = (1-\mu)c_p \ln \frac{\bar{p}}{\bar{p}_{x0}} + c_p \ln \left[1 + \frac{\bar{q}^2}{M^2 \bar{p}^2} \right] - \varepsilon_v^{pc} = 0 \quad (5)$$

式中: $\bar{p}$ 为参考应力点上的平均主应力; $\bar{q}$ 为该点上的广义剪应力; $\bar{p}_{x0}$ 为初始状态时的参考屈服面与 p 轴的交点; ε_v^{pc} 耦合塑性体积应变。

由式 (5) 可得:

$$\bar{p} = \bar{p}_{x0} \exp \left\{ \frac{1}{(1-\mu)} \left[\frac{1}{c_p} \varepsilon_v^{pc} - \ln \left(1 + \frac{\bar{q}^2}{M^2 \bar{p}^2} \right) \right] \right\} \quad (6)$$

由于 $R = p / \bar{p} = q / \bar{q}$, 故超固结参数 R 为

$$R = \frac{p}{\bar{p}_{x0}} \exp \left\{ \frac{-1}{(1-\mu)} \left[\frac{1}{c_p} \varepsilon_v^{pc} - \ln \left(1 + \frac{\eta^2}{M^2} \right) \right] \right\} \quad (7)$$

对于正常固结土, 由于 $p = \bar{p}$ 、 $q = \bar{q}$ 、 $p_{x0} = \bar{p}_{x0}$ 和 $R=1$, 根据式 (1) 和式 (5), $H^c = \varepsilon_v^{pc}$, 故当前屈服面和参考屈服面重合, 即当前屈服面函数表达式 (1) 和参考屈服面函数表达式 (5) 相同。

2.2 模型的塑性势面

采用非相关联流动法则, 当前应力点所对应的塑性势面为

$$g = \ln \frac{p}{p_x} + \ln \left(1 + \frac{q^2}{M^2 p^2} \right) = 0 \quad (8)$$

式中: p_x 为当前塑性势面与 p 轴的交点。

3 模型预测分析

3.1 在 p 为常数路径下的应力应变关系

图 2 为 p 为常数时不同超固结度土的应力-应变关系, 由图可知, 当 $OCR > 1$ 时, 加载中有下降段, 即 $dq < 0$, 此时的加卸载准则与 $dq > 0$ 不同。

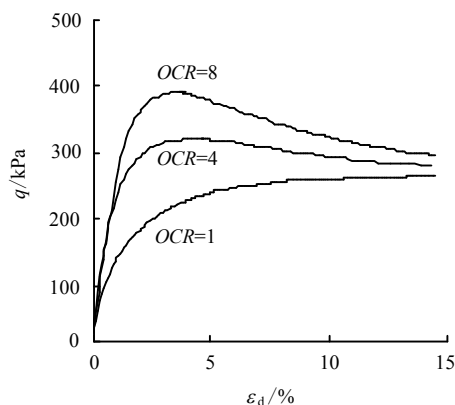
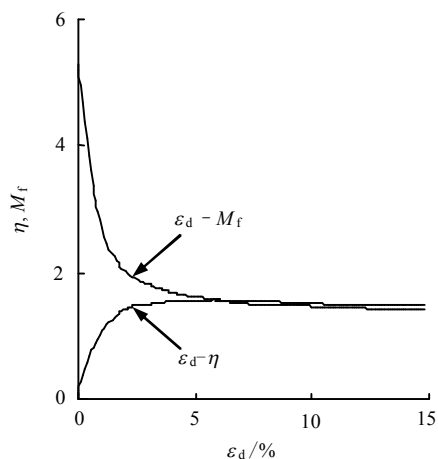
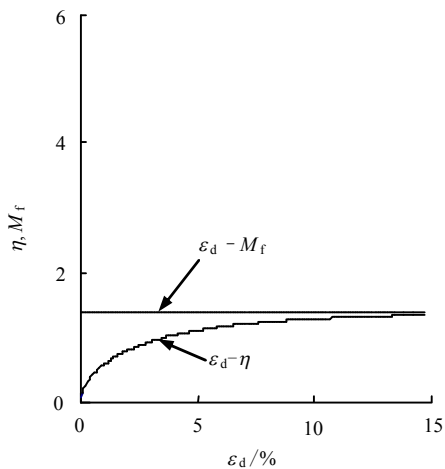


图 2 p =常数条件下超固结土的应力-应变关系
Fig.2 Relationships of stress-strain of OC clays under p =constant



(a) OCR=8



(b) OCR=1

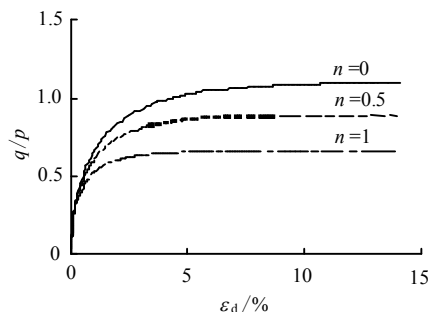
图3 在 p =常数条件下 M_f 与 η 关系Fig.3 Relationships between M_f and η under p =constant

图3(a)和(b)为 p 等于常数试验条件下 ε_d - η 和 ε_d - M_f 预测曲线,由计算可知,当应力比 η 超过峰值点后, $dq < 0$, $dp_x < 0$,此时 $M_f < \eta$,所以此时 $dp_x < 0$ 表示的屈服面减小不是卸载,仍然是加载。图中分别表示了 $OCR=8$ 和 $OCR=1$ 的预测曲线,在 η 的峰值处应力比 η 与潜在强度 M_f 相交,超过峰值后, $M_f < \eta$,此时仍然是加载软化。

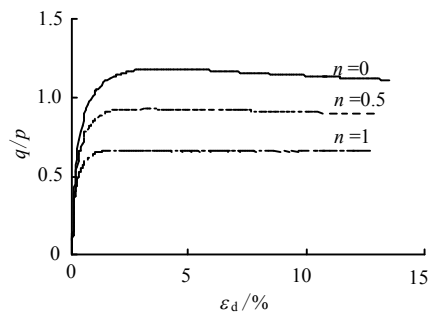
3.2 $d\varepsilon_v/d\varepsilon_1 = n$ 路径下的的应力应变关系

$d\varepsilon_v/d\varepsilon_1 = n$ 表示不同的约束条件。 $n=0$ 对应着不排水条件, $n=1$ 对应着一维固结条件,所建立的本构模型可以预测不同超固结度、约束条件的应力-应变关系。

图4、5为 $OCR=1$ 和 $OCR=8$ 的超固结土在 $d\varepsilon_v/d\varepsilon_1 = 0, 0.5, 1$ 应变路径条件下的应力-应变曲线,模型参数为 $\lambda=0.812$ 、 $\kappa=0.093$ 、 $M=1.1$ 、 $M_h=0.8$ 、 $\nu=0.3$,此外, $e_0=0.707$ 、 $\mu=0.586$ 。由图4、5可见,沿任何应变路径超固结土均具有较高的强度,并表现为软化特性,但最终能和正常固结土对应着相同的渐近状态应力比。



(a) OCR=1



(b) OCR=8

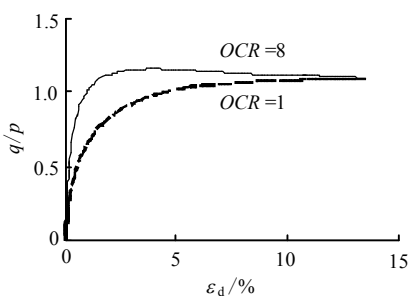
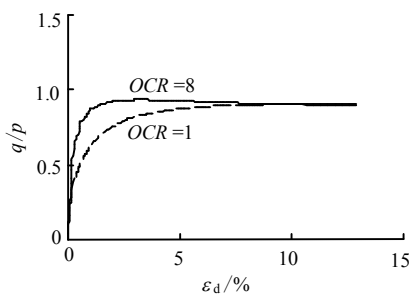
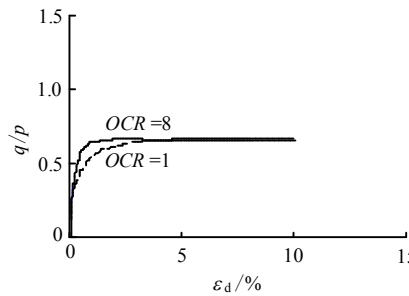
图4 n 值不同应力-应变关系比较Fig.4 Stress-strain relations with different values of n (a) $n=0$ (b) $n=0.5$ (c) $n=1$

图5 超固结土和正常固结土应力-应变关系比较

Fig.5 Relationships of stress-strain between OC clay and NC clay

图6为 $n=0$ 、0.5和1与 $\mu=0.586$ 条件下分别采用超固结土模型(图中虚线)和本文建立模型(图中实线)预测的应力-应变曲线。由图可见,超固结土比正常固结土有较高的峰值强度;新模型的渐近线高于超固结土模型的渐近线。

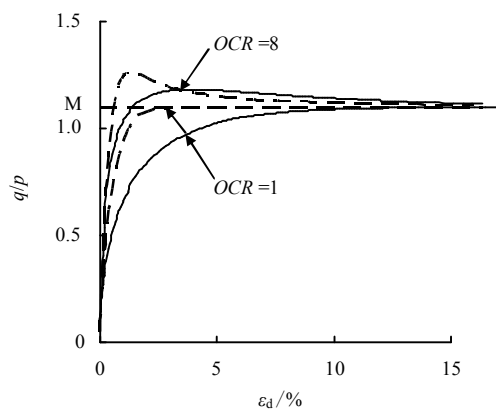
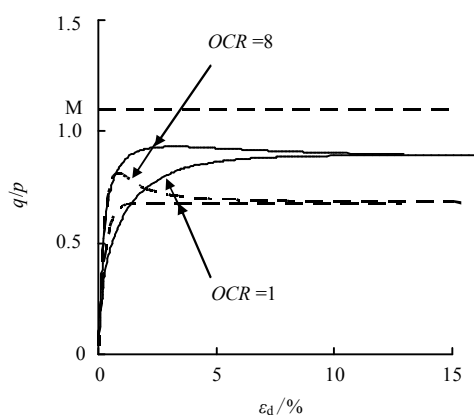
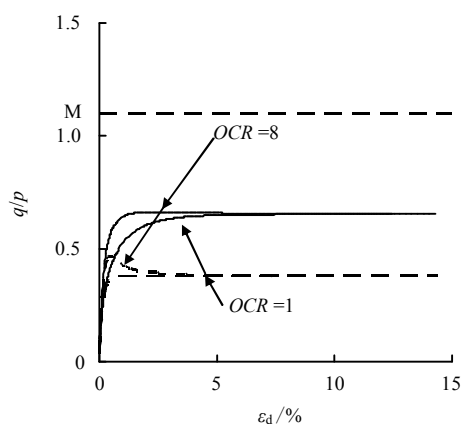
(a) $n=0$ (b) $n=0.5$ (c) $n=1$

图6 两种模型预测结果比较
Fig.6 Comparison between predicted results by using two models

4 基于 SMP 准则的变换应力方法

为了准确地描述土的三维应力状态下的变形和强度特性,本文基于 SMP 强度准则,将一般应力空间的应力张量变换成变换应力空间的应力张量^[15-19]。

$$\tilde{\sigma}_{ij} = p\delta_{ij} + \frac{q_c}{q}(\sigma_{ij} - p\delta_{ij}) \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} q_c &= \frac{2I_1}{3\sqrt{(I_1I_2 - I_3)/(I_1I_2 - 9I_3)} - 1} \\ q &= \sqrt{\frac{3}{2}(\sigma_{ij} - p\delta_{ij})(\sigma_{ij} - p\delta_{ij})} \\ p &= \frac{1}{3}\sigma_{ij}\delta_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式中: δ_{ij} 为 Kronecker 符号; I_1 、 I_2 和 I_3 分别第1、第2和第3应力不变量。

5 变换应力空间的本构关系

5.1 变换应力空间的本构方程

在变换应力空间,参考屈服面 $\bar{f}$ 为

$$\bar{f} = (1-\mu)c_p \ln \frac{\tilde{p}}{\tilde{p}_{x0}} + c_p \ln \left(1 + \frac{\tilde{\eta}^2}{M^2} \right) - \varepsilon_v^p = 0 \quad (11)$$

式中:在变换应力空间 $\tilde{p}$ 为参考应力点的平均主应力; $\tilde{p}_{x0}$ 为初始状态时的参考屈服面与 p 轴的交点; $\tilde{\eta}$ 为该点的应力比。

变换应力空间的当前屈服面 f 和相应的塑性势面 g 可表示为

$$\left. \begin{aligned} f &= (1-\mu)c_p \ln \frac{\tilde{p}}{\tilde{p}_{x0}} + c_p \ln \left(1 + \frac{\tilde{\eta}^2}{M^2} \right) - \tilde{H}^c = 0 \\ g &= \ln \frac{\tilde{p}}{\tilde{p}_x} + \ln \left(1 + \frac{\tilde{q}^2}{M^2 \tilde{p}^2} \right) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

其中:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{H}^c &= \int \frac{M_f^4 - \tilde{\eta}^4}{M^4 - \tilde{\eta}^4} d\varepsilon_v^{pc} \\ M_f &= \left(\frac{1}{\tilde{R}} - 1 \right) (M - M_h) + M \\ \tilde{R} &= \frac{\tilde{p}}{\tilde{p}_{x0}} \exp \left\{ \frac{-1}{(1-\mu)} \left[\frac{1}{c_p} \varepsilon_v^{pc} - \ln \left(1 + \frac{\tilde{\eta}^2}{M^2} \right) \right] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

式中：在变换应力空间 $\tilde{p}$ 为当前应力点上的平均主应力； $\tilde{\eta}$ 为该点的应力比； $\tilde{p}_{x0}$ 为初始状态时的当前屈服面与 p 轴的交点； $\tilde{H}^c$ 为耦合硬化参数； $\tilde{R}$ 为超固结参数。

5.2 弹性应变增量和塑性应变增量

总应变增量 $d\varepsilon_{ij}$ 为弹性应变增量 $d\varepsilon_{ij}^e$ 和耦合的塑性应变增量 $d\varepsilon_{ij}^{pc}$ 和非耦合的塑性应变增量 $d\varepsilon_{ij}^{punc}$ 之和，其表达式如下：

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^{pc} + d\varepsilon_{ij}^{punc} \quad (14)$$

(1) 弹性应变增量

根据广义虎克定律求得弹性应变增量如下：

$$d\varepsilon_{ij}^e = \frac{1+\nu}{E} d\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} d\sigma_{mm} \delta_{ij} \quad (15)$$

式中： ν 为泊松比，弹性模量 E 可表示为

$$E = \frac{3(1-2\nu)(1+e_0)}{\kappa} p \quad (16)$$

式中： e_0 为 $p = p_0$ 对应的初始孔隙比。

(2) 塑性应变增量

耦合的塑性应变增量

$$d\varepsilon_{ij}^{pc} = \Lambda \frac{\partial g}{\partial \tilde{\sigma}_{ij}} \quad (17)$$

由式 (12) 得：

$$\frac{\partial g}{\partial \tilde{\sigma}_{ij}} = \frac{1}{M^2 \tilde{p}^2 + \tilde{q}^2} \left[\frac{M^2 \tilde{p}^2 - \tilde{q}^2}{3\tilde{p}} \delta_{ij} + 3(\tilde{\sigma}_{ij} - \tilde{p} \delta_{ij}) \right] \quad (18)$$

非耦合的塑性应变增量

$$d\varepsilon_{ij}^{punc} = \mu c_p \frac{M^4}{M_f^4} \frac{1}{3\tilde{p}} d\tilde{p} \delta_{ij} \quad (19)$$

对于正常固结土，并当沿着 p 为常数应力路径剪切时，由式 (19) 求得的非耦合塑性应变增量为 0，屈服函数式 (12) 中的第一项也不起作用，所以这时该模型将退化为剑桥模型。

5.3 加卸载准则

为了描述在复杂应力路径条件下土的应力-应变特性，采用加卸载准则来区分软化和卸载状态。软化时屈服面收缩，土体表现为弹塑性变形，而卸载时屈服面位置也收缩，土体却表现为弹性变形^[20]。

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}_{ij}} D_{ijkl}^e d\varepsilon_{kl} > 0 & \text{加载} \\ \frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}_{ij}} D_{ijkl}^e d\varepsilon_{kl} = 0 & \text{中性变载} \\ \frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}_{ij}} D_{ijkl}^e d\varepsilon_{kl} < 0 & \text{卸载} \end{cases} \quad (20)$$

式中： D_{ijkl}^e 为弹性刚度矩阵。

6 模型预测与验证

图 7 为采用本文所提出模型预测的正常固结土在 σ_3 为常数条件下的预测曲线和试验数据的比较。通过两者的比较可以看出：由于在模型中采用了渐近状态的概念，本文所提出模型能够较好地描述 σ_3 为常数条件下的土应力应变关系。

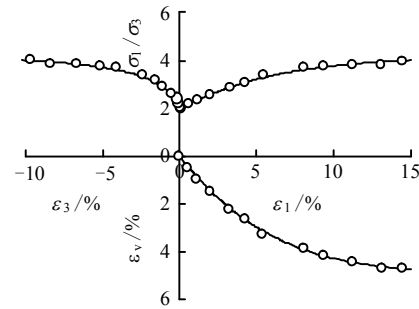
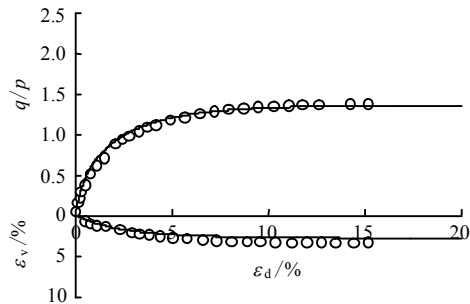


图 7 σ_3 为常数条件下的预测曲线与试验数据比较
Fig.7 Comparison between predicted results and test data under $\sigma_3 = \text{constant}$

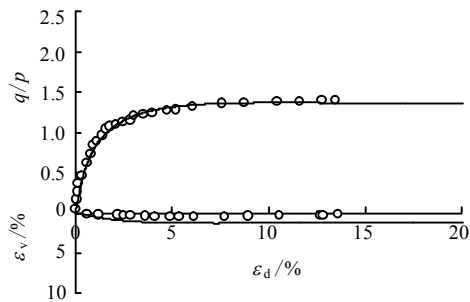
图 8 为采用本文提出的本构模型预测的 Fujinori 黏土 p 为常数的排水三轴压缩条件的应力应变曲线与试验结果^[20]的比较。其中，实线为所建立本构模型的预测曲线，圆圈为试验结果。 $OCR=1、2、4$ 时，平均主应力为 196 kPa， $OCR=8$ 时，平均主应力为 98 kPa。由图 8 (a) 可见，当 $OCR=1$ ，土为正常固结土，当沿着 p 为常数的应力路径剪切时，本模型退化为剑桥模型（见 5.2 中的论述），随着超固结度增大，土的峰值强度增高，土的剪胀程度增大，见图 8 (b) ~ (d)。与文献[8]相比，所建立本构模型能够更好地预测出相应的应力-应变变化规律。

参照文献[8]，模型参数 $\nu=0.3$ 、 $\lambda/(1+e_0)=0.0508$ 、 $\kappa/(1+e_0)=0.0112$ 。在本文中参数 M 、 M_h 和 μ 的取值依据为：通过对 Fujinori 黏土试验结果的分析知， M 取值范围为 1.34~1.42，从图 8 (a) 的模型预测可以看出，取 $M=1.36$ 的预测与试验结果更接近； M_h 为伏斯列夫线的斜率，它是不排水

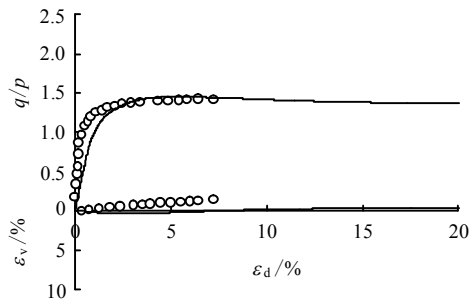
应力路径包线的斜率, 由于试验结果的随机性, 该参数会在某一较小的范围内浮动, 对于 Fujinomori 黏土, 与考虑渐近状态特性的超固结土本构模型相匹配的参数 $M_h=0.8$; $\mu=0.418$ 由公式 $\mu=1-\lambda M/[3(\lambda-\kappa)]$ 求得。



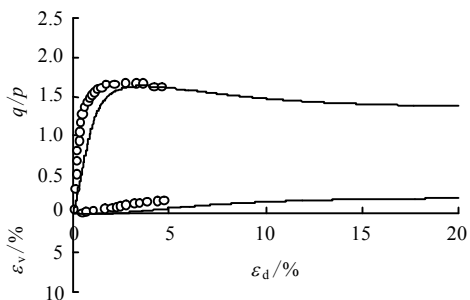
(a) OCR=1



(b) OCR=2



(c) OCR=4



(d) OCR=8

图8 p 为常数的排水三轴压缩试验数据与预测曲线比较
Fig.8 Comparison between predicted results and test data in triaxial compression test with $p=\text{constant}$

7 结 语

为了合理描述土的超固结特性和渐近状态特性, 本文基于超固结土模型, 结合渐近状态概念, 将适用于饱和砂土的渐近状态模型发展为能够描述不同应力路径下土的考虑渐近状态特性的超固结土本构模型。采用变换应力方法对模型实现了三维化。通过对正常固结土的 σ_3 为常数的路径、超固结土的三轴压缩条件下试验数据的合理预测, 表明了所建立本构模型能够合理反映超固结土的硬化、软化、临界状态、剪缩、剪胀、应力路径依赖性和渐近状态等特性。

参 考 文 献

- [1] PENDER M J. A model for the behaviour for overconsolidated soil[J]. *Geotechnique*, 1978, 28(1): 1—25.
- [2] DAFALIAS Y F. Bounding surface plasticity I: Mathematical formulation and hypoplasticity[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 1986, 112(9): 966—985.
- [3] HASHIGUCHI K. Subloading surface model in unconventional plasticity[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1989, 25: 917—945.
- [4] ASAOKA A. Consolidation of clay and compaction of sand—an elasto-plastic description[C]//12 Asian Regional Conference on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering. [S. l.]: World Scientific Publishing Company, 2004: 1157—1195.
- [5] ASAOKA A, NAKANO M, NODA T. Elastoplastic behavior of structured overconsolidated soils[J]. *Journal of Application Mechanics(JSCE)*, 2000, (3): 335—342.
- [6] GUDEHUS G, GOLDSCHIEDER M, WINTER H. Mechanical properties of sand and clay and numerical integration methods: Some sources of errors and bounds of accuracy[J]. *Finite Elements in Geomechanics*, 1977: 121—150.
- [7] CHU J, LO S C R. Asymptotic behaviour of a granular soil in strain path testing[J]. *Geotechnique*, 1994, (44): 65—82.
- [8] 姚仰平, 侯伟, 周安楠. 基于 Hvorslev 面的超固结土模型[J]. *中国科学*, 2007, 37(11): 1417—1429.
YAO Yang-ping, HOU Wei, ZHOU An-nan. A constitutive model for overconsolidated clays based on the Hvorslev envelope[J]. *Science in China*, 2007, 37(11): 1417—1429.

- [9] 姚仰平, 侯伟. 土的基本力学特性及其弹塑性描述[J]. 岩土力学, 2009, 30(10): 2881—2902.
YAO Yang-ping, HOU Wei. Basic mechanical behavior of soils and their elastoplastic modeling[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2009, 30(10): 2881—2902.
- [10] 罗汀, 姚仰平. 饱和砂土渐近状态特征及其模拟[J]. 中国科学(E 辑), 2009, 39(1): 39—47.
LUO Ting, YAO Yang-ping. Asymptotic state behaviour and its modeling for saturated sand[J]. **Science in China (Ser. E)**, 2009, 39(1): 39—47.
- [11] YAO Y P, LUO T, SUN D A, et al. A simple 3-D constitutive model for both clay and sand[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2002, 24(2): 240—246.
- [12] YAO Y P, SUN D A, MATSUOKA H. A unified constitutive model for both clay and sand with hardening parameter independent on stress path[J]. **Computers and Geotechnics**, 2008, 35: 210—222.
- [13] YAO Y P, SUN D A, LUO T. A critical state model for sands dependent on stress and density[J]. **Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.**, 2004, 28: 323—337.
- [14] 姚仰平, 祝恩阳. K_0 压密土的湿化试验规律及其描述[J]. 工业建筑, 2008, 38(4): 50—53.
YAO Yang-ping, ZHU En-yang. Experimental rules of slaking for K_0 compressed clay and its description[J]. **Industrial Construction**, 2008, 38(4): 50—53.
- [15] YAO Y P, ZHOU A N, LU D C. Extended transformed stress space for geomaterials and its application[J]. **Journal of Engineering Mechanics, ASCE**, 2007, 133(10): 1115—1123.
- [16] MATSUOKA H, YAO Y P, SUN D A. The Cam-clay models revised by the SMP criterion[J]. **Soils and Foundations**, 1999, 39(1): 81—95.
- [17] YAO Y P, SUN D A. Application of Lade's criterion to Cam-clay model[J]. **J. Engrg. Mech., ASCE**, 2000, 126(1): 112—119.
- [18] YAO Y P, SUN D A. Application of Lade's criterion to Cam-clay model (closure)[J]. **J. Engrg. Mech., ASCE**, 2001, 127(6): 631—633.
- [19] 姚仰平, 路德春, 周安楠, 等. 广义非线性强度理论及其变换应力空间[J]. 中国科学(E 辑), 2004, 34(11): 1283—1299.
YAO Yang-ping, LU De-chun, ZHOU An-nan, et al. Generalized non-linear strength theory and transformed stress space[J]. **Science in China (Ser. E)**, 2004, 34(11): 1283—1299.
- [20] NAKAI T, HINOKIO M. A simple elastoplastic model for normally and over consolidated soils with unified material parameters[J]. **Soils and Foundations**, 2004, 44 (2): 53—70.