

文章编号: 1000-7598-(2008)03-0580-06

砂土的渐进破坏及其数值模拟

蔡正银

(南京水利科学研究院 岩土工程研究所, 南京 210024)

摘 要: 紧密砂土在排水剪切过程中由于材料的应变软化特性, 会出现变形局部化并伴随剪切带的产生。对此类问题进行数值模拟时会遇到很多困难, 比如如何模拟紧砂的应变软化特性, 如何处理有限元数值分析过程中刚度矩阵的非正定导致计算结果发散问题, 以及如何处理应力不连续的问题, 拟针对以上问题进行了探讨。

关 键 词: 砂土; 变形局部化; 应变软化; 数值模拟

中图分类号: TU 431

文献标识码: A

Progressive failure of sand and its numerical simulation

CAI Zheng-yin

(Department of Geotechnical Engineering, Nanjing Hydraulic Research Institute, Nanjing 210024, China)

Abstract: It is well known that due to the strain softening behavior, the strain localization along with shear band formation will occur in the dense sand subjected to shearing under drained condition. In numerical simulation there are quite a lot of issues should be solved, such as how to simulate the strain softening behavior of dense sand and how to avoid the divergence problem in finite element analysis, and more over how to deal with the discontinuous of stress. The above mentioned issues are discussed in detail.

Key words: sand; strain localization; strain softening; numerical simulation

1 引 言

在极限平衡理论中, 假定土体破坏时塑性区内各点剪应力同时达到抗剪强度, 这种假设只有对理想塑性材料才有可能。大量的研究表明, 密砂在常规压力下剪切, 其破坏方式往往表现为局部剪切破坏, 随着剪应变的增大, 剪切带中的土体发生应变集中, 而其他部分的土体表现为卸载的特性。所谓土体的渐进破坏, 就是指土体在剪切过程中出现变形集中, 并逐步形成剪切带以及剪切带的进一步发展直至破坏的全过程。

关于土体的应变局部化和剪切带的形成机制, 许多学者进行了大量的试验与理论研究工作, 形成了一系列的理论体系, 主要包括: 局部化分叉理论、非共轴流动理论、Cosserat 理论、非局部应变理论、梯度塑性理论、复合体理论、广义孔隙压力理论等。从目前的研究进展来看, 这些分析方法基本上停留在理论探讨上, 其中许多分析过程中的附加参数没有明确的物理意义, 且很难通过试验来确定。同时,

不管采用何种理论, 对剪切带形成的研究离不开对土的本构特性的合理描述, 只有所采用的本构模型能够正确地反映土体内在的变形规律, 进行剪切带形成的分析才真正具有实际意义。

近来, 一些学者试图用数值分析方法来研究变形局部化问题。Bouer 和 Huang^[1]用有限元程序分析了干砂中剪切带的产生与土体初始状态之间的关系, 其分析结果验证了试验得到的结论。只是由于使用的砂土模型存在某些缺陷, 未能正确反映出土体的局部变形规律。赵锡宏和张启辉^[2]等用有限元法模拟了三轴不排水条件下上海黏土试样中剪切带的形成过程, 探讨了剪切带形成的原因。蔡正银和李相菰^[3, 4]将砂土的状态相关本构模型置于耦合的有限元程序中分析了平面应变条件下饱和砂土中剪切带的形成全过程及其变化规律, 从理论上证实了紧密砂土的应变软化特性是导致变形局部化的根本原因。研究表明, 剪切带的形成与砂土的状态密切相关, 剪切带形成后, 土体的变形模式分为两种, 即剪切带中及其邻近的土体表现为软化加载, 而其

收稿日期: 2007-07-03

作者简介: 蔡正银, 男, 1965 年生, 博士, 教授级高级工程师, 从事土工测试、土工离心模拟技术、土工数值分析方面的研究工作。

E-mail: zycail@nhri.cn

他部分的土体表现为卸载。研究还发现, 剪破角不是一个材料常数, 而是与土体的初始状态有密切的关系。

本文主要介绍砂土中剪切带形成的有限元分析过程中出现的一些问题及其解决的方法, 包括砂土应变软化特性的模拟、应力的空间平均法等。

2 砂土的应变软化特性及其数值模拟

一般认为, 剪切带的形成与材料的应变软化特性有关。对于剪切带的形成过程的数值模拟, 一个重要的因素就是如何对材料应变软化特性进行正确描述。沈珠江将土体的应变软化特性分为3种, 即: 减压软化、剪胀软化和损伤软化。对于砂土来说, 在常规应力条件下, 其软化主要表现为剪胀软化。从目前的研究成果来看, 对应变软化特性的描述主要包括两个方面, 一是通过一些经验公式拟合试验得到的应力-应变关系曲线和体变曲线; 另一方面是从材料的状态入手, 在建立弹塑性本构模型时将土的状态参量引入硬化规律方程, 下面分别加以介绍。

2.1 应变软化曲线的经验描述

对于图1所示的应变软化型曲线, 沈珠江^[5]建议用如下经验公式来描述其应力 τ -应变 γ 关系:

$$\tau = \frac{\gamma(a_1 + a_3\gamma)}{(a_1 + a_2\gamma)^2} \quad (1)$$

式中: a_1 , a_2 , a_3 3个材料常数可通过拟合应力-应变关系曲线求得, 与土体的残余强度、峰值强度和相应的剪应变有关。

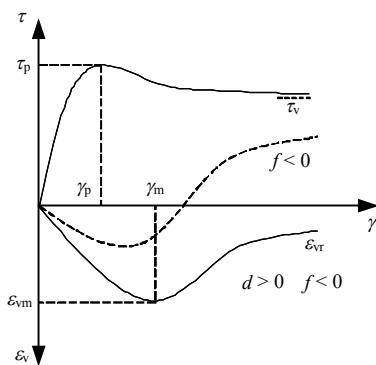


图1 驼峰型应力-应变关系曲线
Fig.1 Hump-type stress-strain curve

同时, 软化型的体变曲线 $\varepsilon_v - \gamma$ 可用下式来描述:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_{v0} + \frac{\gamma(b_1 + b_3\gamma)}{(b_1 + b_2\gamma)^2} \quad (2)$$

式中: b_1 , b_2 , b_3 3个材料常数可通过拟合体变

曲线求得, 与土体的残余体应变、峰值体应变和相应的体应变有关; ε_{v0} 为初始体应变。

Lo^[6]等用如下公式拟合峰后曲线方程为

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{(\sigma_1 - \sigma_3)_f} = \frac{\varepsilon / \varepsilon_f}{c_1 + c_2(\varepsilon / \varepsilon_f)} \quad (3)$$

式中: c_1 和 c_2 为2个材料常数; 下标f代表峰值。

其他一些学者通过对软化性试验曲线的拟合也得到了一些经验公式。这些经验公式都可以反映材料的应变软化特性, 其存在的问题是经验公式中的材料常数没有明确的物理意义, 更主要的是这些经验公式不能正确地反映材料的状态对土体应力-应变特性的影响。

2.2 弹塑性本构模型中应变软化的描述

对于砂土, 它的当前状态对其应力-应变关系影响非常大。在排水条件下, 松砂剪切时发生剪缩, 其应力-应变关系表现为应变硬化, 而紧密砂剪切时发生剪胀, 其应力-应变关系表现为应变软化; 不排水条件下, 松砂剪切时的应力-应变关系表现为塑性流动(液化), 而紧密砂剪切时的应力-应变关系表现为应变硬化。可见, 砂土的变形特性由其当前状态所决定, 而试样的当前状态既取决于土的密度 e , 又取决于所施加的有效平均正应力 p' 。

Been 和 Jefferies^[7]基于土的临界状态线定义了一个状态参量 ψ , 用来描述砂土的当前状态, 它的含义为当前有效平均正应力下的孔隙比 e 与临界孔隙比 e_c 之差, 用公式表示为

$$\psi = e - e_c \quad (4)$$

这样, 只要知道 e 和 p' 的值以及砂土的临界状态线(可通过常规三轴试验获得), 就能准确地描述该砂当前处于何种状态。如果 $\psi < 0$, 表示该砂处于紧密状态, 当受到剪切时会发生剪胀, 其值越大, 剪胀性越大; 反之, 如果 $\psi > 0$, 表示该砂处于疏松状态, 当受到剪切时会发生剪缩, 其值越大, 剪缩性越大。砂土的状态参量已经大量地应用于砂土的本构模拟。

Wood^[8]等人在建立砂土的弹塑性模型时将状态参量 ψ 引入硬化方程, 较好地模拟了砂土的应变软化特性。其硬化方程为

$$\frac{\eta}{M_p} = \frac{\varepsilon_q}{B + \varepsilon_q} \quad (5)$$

式中: B 为模型参数; η 为应力比; ε_q 为剪应变; M_p 为峰值应力比, 它与砂土的临界应力比 M_c 之间的关系为

$$M_p = M_c - k\psi \quad (6)$$

式中： k 为模型参数。从式中可以发现， M_p 随 ψ 的变化而变化。对于松砂初始状态参量 $\psi_0 > 0$ ，在剪切过程中 ψ 始终大于 0，导致 M_p 始终小于 M_c ，即土体没有峰值强度， η 始终不会超过 M_c ，土体一直表现为硬化特性；反之，对于紧砂 $\psi_0 < 0$ ，在剪切过程中 ψ 始终小于 0，导致 M_p 始终大于 M_c ，只有当土体达到临界状态（ $\psi = 0$ ）时，两者才相等。这样， η 就会出现一个峰值强度，其后土体表现为应变软化。图 2 所示为当 $B = 0.1$ ， $k = 2$ 时 η 随初始 ψ_0 的变化曲线。

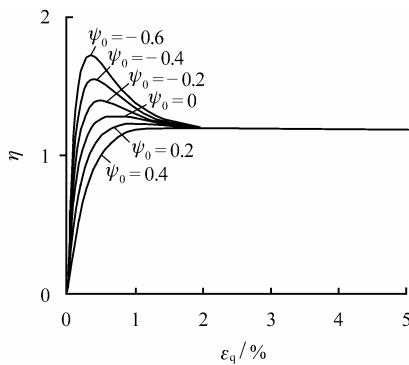


图 2 状态参量对应力-应变关系曲线的影响

Fig.2 Effects of stress-strain curve on state parameter

针对砂土应变硬化和应变软化特性，在弹塑性本构模型建立的过程中，一种更为直接的做法是从应力-应变关系曲线入手，将塑性模量与状态参量联系起来。根据弹塑性理论，对于剪切变形土的应力-应变关系可以表示为

$$d\varepsilon_q = \left(\frac{1}{3G} + \frac{1}{K_p} \right) dq \quad (7)$$

式中： G 为弹性剪切模量； K_p 为塑性模量。复合模量 K_{ep} 可以表示为

$$K_{ep} = \frac{dq}{d\varepsilon_q} = \frac{1}{\frac{1}{3G} + \frac{1}{K_p}} \quad (8)$$

对于软化型的应力-应变关系，可以发现：

(1) 当剪应变水平很小时，砂土的变形以弹性变形为主，即 $dq/d\varepsilon_q \approx 3G$ ，要求 $K_p \rightarrow \infty$ 。

(2) 在硬化阶段， $dq/d\varepsilon_q > 0$ ，要求 $K_p > 0$ ，并且 K_p 随变形的增加而减小。

(3) 当土体达到峰值强度时， $dq/d\varepsilon_q = 0$ ，要求 $K_p \rightarrow 0$ 。

(4) 在软化阶段， $dq/d\varepsilon_q < 0$ ，要求 $K_p < 0$ 。

(5) 在临界状态， $dq/d\varepsilon_q = 0$ ，要求 $K_p \rightarrow 0$ 。

Li 和 Dafalias^[9] (2000 年) 根据研究提出了一个与状态相关的塑性模量表达式为

$$K_p = hG \left(\frac{M_c}{\eta} - e^{n\psi} \right) \quad (9)$$

式中： h 和 n 为 2 个材料常数， hG 相当于硬化参数。现以常规三轴压缩试验分析 K_p 的变化过程：

(1) 当剪应变水平较小时， $\eta \rightarrow 0$ ， $K_p \rightarrow \infty$ 。在硬化阶段， η 增大， $\frac{M_c}{\eta} > e^{n\psi}$ ， $K_p > 0$ ，并且 K_p 随变形的增加而减小；当土体达到峰值强度时， $\frac{M_c}{\eta} = e^{n\psi}$ ， $K_p \rightarrow 0$ ；在软化阶段， η 减小， $\frac{M_c}{\eta} < e^{n\psi}$ ， $K_p < 0$ 。

(2) 在临界状态， $\eta = M_c$ ， $\psi = 0$ ， $K_p = 0$ 。

紧砂排水剪切时 ψ 和 K_p 随 η 的变化规律如图 3 所示。可见式 (9) 能正确地反映材料的应变硬化与应变软化特性。

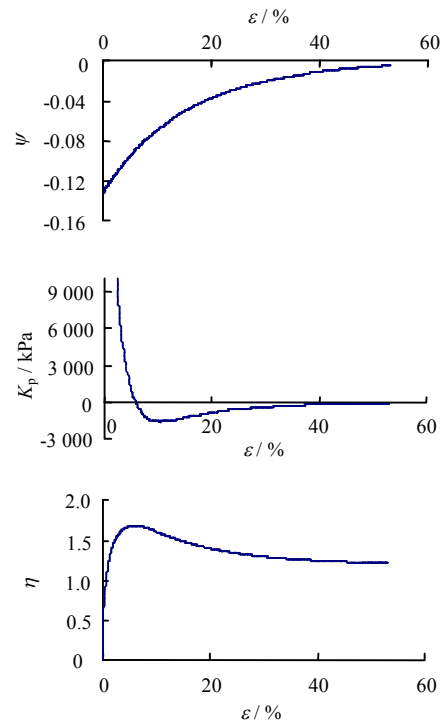


图 3 紧密砂 ψ 、 K_p 和 η 之间的关系

Fig.3 ψ versus K_p and η for dense sand

3 有限元分析中的空间加权平均法

在有限元分析过程中，特别是当所研究的对象为高度非线性时，经常会发现计算出的应力场出现不连续的现象，表现为各单元之间应力出现跳跃，甚至同一个单元中各高斯积分点的应力出现异常的变化，这种现象通常被称为“沙漏”现象。图 4(a) 所示为一简单的平面有限元问题的应力等值线，该

计算区域包括 72 个单元, 每个单元有 9 个节点, 采用 9 个高斯积分点进行计算。从图中可以发现, 不仅各个单元之间的应力分布是不连续的, 同一单元各高斯积分点上的应力也是不连续的, 出现了应力的跳跃。局部应力越集中, 应力的不连续就越明显, 这给有限元计算分析带来很大的问题。

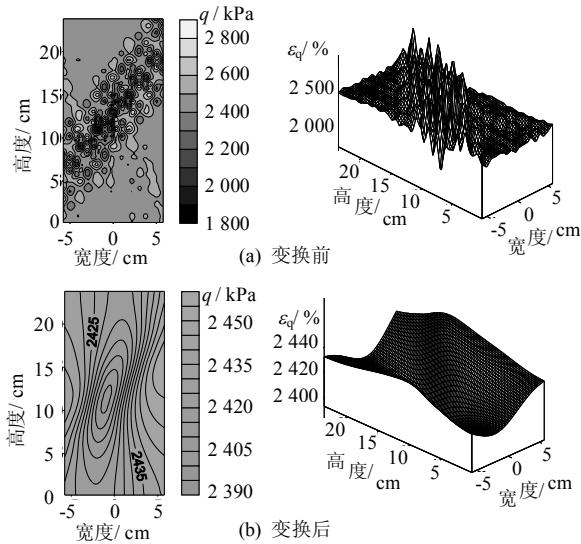


图4 应力的空间加权平均

Fig.4 Weighted averaging in stress space

目前, 在有限元计算过程中采用一些手段来解决这个问题, 其中一种办法是从单元中挑选代表性高斯积分点上的应力作为单元应力; 另一种常用的做法是将单元中各高斯积分点的应力进行平均处理, 用单元平均应力作为单元应力。很显然, 不管采用代表性应力还是采用单元平均应力, 整个应力场的应力分布仍然是不连续的。在本文有限元分析过程中, 采用一种空间应力平均的办法来对所有高斯积分点的应力进行处理^[10]。经过这样的处理后, 可以得到整个计算域的连续应力分布。

通常, 在位置 $\tilde{x}$ 处的非局部应力张量的空间平均表达式为

$$\hat{\sigma}_{ij}(\tilde{x}) = \frac{1}{V_r(\tilde{x})} \int_V \omega(\tilde{s} - \tilde{x}) \sigma_{ij}(\tilde{s}) dV = \quad (10)$$

$$\int_V \omega'(\tilde{x}, \tilde{s}) \sigma_{ij}(\tilde{s}) dV$$

$$V_r(\tilde{x}) = \int_V \omega(\tilde{s} - \tilde{x}) dV \quad (11)$$

$$\omega'(\tilde{x}, \tilde{s}) = \omega(\tilde{s} - \tilde{x}) / V_r(\tilde{x}) \quad (12)$$

式中: 上标 $\wedge$ 表示平均运算; V 代表平均运算范围; 对于空间问题, V 为一代表性的体积, 对于平面问题, 用代表性面积 A 来代替; $\tilde{s}$ 为广义坐标向量;

$\omega(\tilde{x})$ 为权函数。权函数一般采用正态分布函数, 如误差函数经常被用来作为权函数使用, 其表达式为

$$\omega(r) = \frac{1}{l\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{r}{l}\right)^2} \quad (13)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega(r) dr = 1 \quad (14)$$

式中: r 为有效半径; l 为特征长度, 定义了代表性范围的直径。

在有限元分析过程中, 式(10)所示的积分表达式用高斯积分公式来近似, 其权函数可以直接用位移形函数。平均的效果由参数 l 来控制。在本研究中, l 取 2 倍的单元尺寸。图 4(b)所示为经过平均运算处理后的竖向应力等值线图。可以发现, 计算域内的应力基本呈连续分布。

4 砂土中剪切带形成的数值模拟

作为一个算例, 本文针对紧密砂试样在排水条件下的平面应变试验结果进行了有限元模拟。试样的断面如图 5(a)所示, 为 12 cm × 24 cm 的矩形。该断面被划分为 72 个 9 节点四边形等参单元, 其总节点数为 325。为了提高计算精度, 每个单元采用 9 个高斯点作为数值积分点。

假设试样为完全饱和的 Leighton-Buzzard 标准砂。该砂为均匀的石英粉细砂, 其粒径为 0.09 ~ 0.15 mm, 不均匀系数为 1.3, 颗粒的比重为 2.65, 最大和最小干密度分别为 1.59 g/cm³ 和 1.23 g/cm³。土的渗透系数假设为 $k_1 = k_2 = 1 \times 10^{-5}$ m/s。孔隙流体的体积模量假设为 $\Gamma_w = 2.2 \times 10^6$ kPa。

初始条件如图 5(b)所示。对于两种密度的试样, 都假设试样中除了单元 33 以外, 所有其他单元的密度都一样, 而单元 33 的孔隙比比其他单元的孔隙比高 1% (单元 33 称为弱单元)。紧密砂的初始相对密度为 60%, 试样受到的初始围压为 300 kPa。

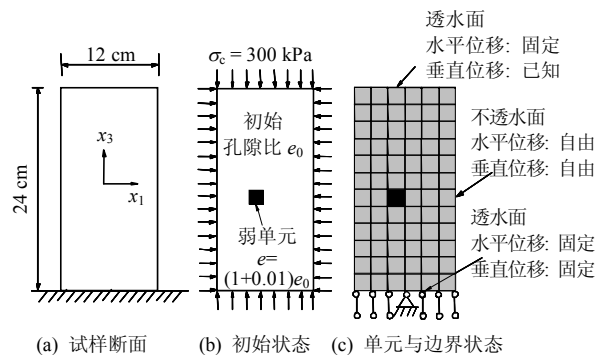


图5 模拟砂土试样的状态

Fig.5 State of sand sample

边界条件如图 5(c)所示。假设:(1) 试样的左右两侧为不透水面, 且允许发生水平和竖向位移;

(2) 试样顶部和底部为透水面, 不允许发生水平位移;(3) 试样底部不允许发生竖直位移;(4) 顶部竖直位向为指定(位移控制)。这样, 数值分析过程完全模拟排水条件下砂土的平面应变试验。

荷载按位移控制方式从试样顶部施加, 共分为 1 000 个加载段。对于每一个荷载段, 竖直位移增量控制为 7.2×10^{-2} mm, 相当于应变速率为 0.03 %。这样, 总竖直位移控制为 30 %。每一步的加荷时间设置为 2 s, 这样的加荷速率允许孔隙水压力在给定时间内充分消散。在所有加荷过程中, 试样承受的围压始终保持不变。

图 6 为紧密砂试样各计算高斯点(取单元中心点)在荷载作用下的全局和局部应力-应变关系曲线。图中高斯点 293 所在的单元为假设的“弱单元”。从图中可以发现:

(1) 在“软弱点”的剪应力 q 达到其峰值以前, 各计算高斯点变形随荷载的增加而增加, 同时由于试样端部约束的影响, 各单元的应变很小时就发生很大的变化, 但这时试样中还没有形成剪切带。

(2) 当“软弱点”的剪应力 q 超过其峰值强度以后, 各计算高斯点的局部变形模式可以很清楚地分为两种:“弱单元”及其相邻单元中土体表现为软化加载, 而远离“软弱点”的单元中的土体表现为卸载, 可以想象此时应变已经开始发生局部化, 剪切带已经被触发。随着全局变形的继续发展, 剪应变越来越集中于“弱单元”及其相邻单元中。当全局剪应变达到 6 % 时, “软弱点”中心的剪应变已经超过 25 %, 而离“软弱点”较远单元中的剪应变只有 1 %~3 %。

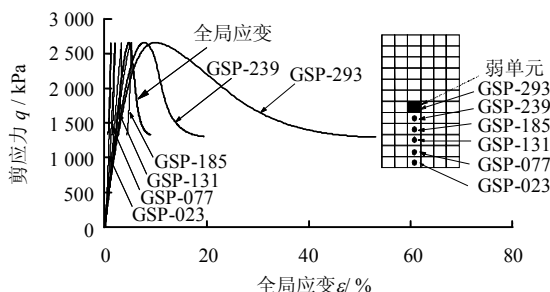


图 6 全局与局部应力-应变关系
Fig.6 Global and local stress-strain relations

图 7 为紧密砂试样在全局变形分别为 2 %, 10 % 时的节点位移图。图中, 空心圆点表示初始节点位置, 实心圆点代表某一剪应变下变位后的节点

位置。从图中可以发现, 当全局变形为 2 % 时(此时, 土体处于硬化状态), 试样的变形中间大, 周边小, 基本上是对称分布。而当全局变形达到 10 % 时, 试样产生了一条非常明显的剪切带, 这样试样的变形就集中于该剪切带中。很明显, 剪切带穿过“软弱点”。

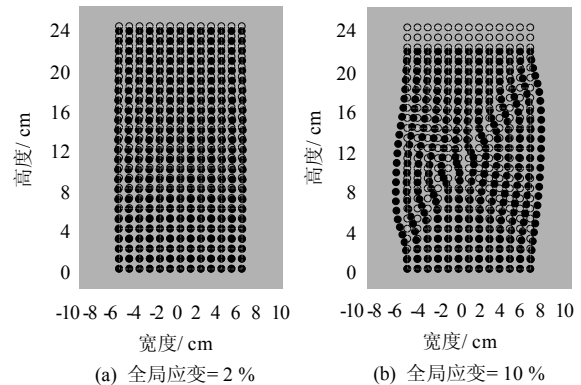


图 7 单元结点位移

Fig.7 Nodal displacements

图 8 为紧密砂试样在全局变形分别为 2 %, 10 % 时的剪应变等值线图。当全局变形为 2 % 时, 试样中剪应变的分布基本均匀; 当全局变形为 10 % 时, 试样产生了两条剪切带, 一主一次。随着全局变形的不断增加, 局部变形越来越集中。

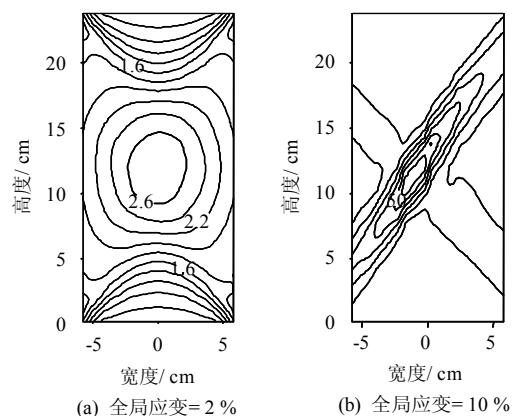


图 8 试样中的剪应变等值线(单位: %)

Fig.8 Contours of shear strains of sample(unit: %)

图 9 为紧密砂试样在全局变形分别为 2 %, 10 % 时的剪应力等值线图。与剪应变等值线图(图 8)相比可以发现, 虽然剪应力也发生局部化, 但其程度比剪应变的局部化要小得多。

图 10 是紧密砂试样的全局体积变形与各计算高斯点局部体积变形随全局变形的变化图。可以发现, 当变形处于初始硬化区域, 各高斯点局部体积变形

的变化幅度较小,基本表现为压缩变形。当“弱单元”进入软化区后,各高点局部体积变形的差异随全局变形的增加而增大,而以“软弱点”的体积变形为最大,离“软弱点”越远体积变形越小,且所有的体积变形都为剪胀。

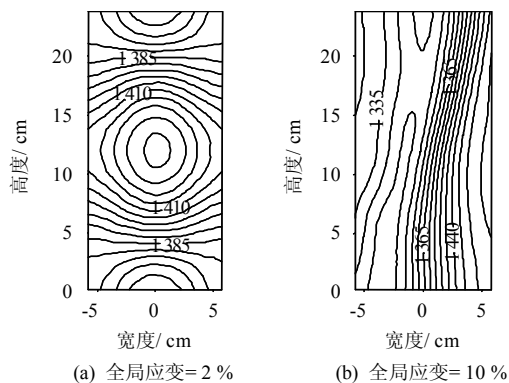


图9 试样中的剪应力等值线(单位: kPa)
Fig.9 Contours of shear stresses(unit: kPa)

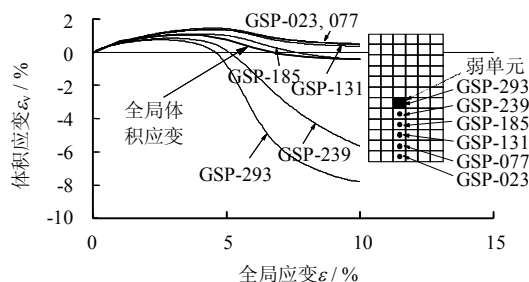


图10 单元体积应变与全局体积应变的比较
Fig.10 Comparison between local and global volumetric strain

图11为紧密砂试样在全局变形为5%时所测量的剪切带的角度。在此情况下,剪切带与竖向应力面之间的夹角为 49.7° 。按Mohr-Coulomb理论计算的剪破角为 60° ,这显然与本文数值分析结果不符。

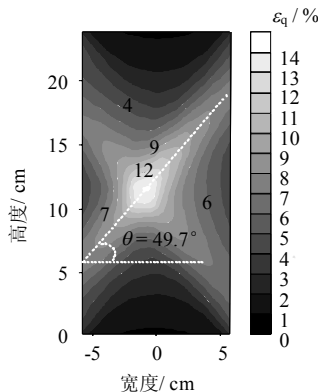


图11 计算剪破角
Fig.11 Computed inclination angles

5 结 语

本文通过耦合的有限元数值分析研究了平面应变条件下排水剪切时砂土中剪切带的形成过程,介绍了数值分析过程中可能出现的一些问题及其解决办法。大量的研究表明,应变局部化与材料的应变软化特性密切相关。因此,要正确地模拟应变局部化问题,必须首先模拟好材料的应变软化特性,而这可以通过几种方法来实现。此外,在有限元数值分析过程中,经常会出现应力不连续的现象,本文提出了一种空间的加权平均法,较好地解决了这个问题。

参 考 文 献

- [1] BAUER E, HUANG W. The dependence of shear banding on pressure and density in hypoplasticity[C]// Localization and Bifurcation Theory for Soils and Rocks. Rotterdam: Balkema A A, 1998.
- [2] 赵锡宏, 张启辉. 土的剪切带试验与数值分析[M]. 北京: 机械工业出版社, 2003.
- [3] 蔡正银, 李相菘. 无黏性土中剪切带的形成过程[J]. 岩土工程学报, 2003, 24(5): 129—134.
CAI Zheng-yin, LI Xiang-song. Formation of shear band in cohesionless soils[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2003, 24(5): 129—134.
- [4] 蔡正银, 李相菘. 取决于材料状态的变形局局部化现象[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(4): 535—538.
CAI Zheng-yin, LI Xiang-song. State-dependent strain localization[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2004, 23(4): 535—538.
- [5] 沈珠江. 理论土力学[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2000.
- [6] LO K Y. An approach to the problem of progressive failure[J]. *Can. Geot. J.*, 1972, 9(4): 407—429.
- [7] BEEN K, JEFFERIES M G. A state parameter for sands[J]. *Geotechnique*, 1985, 35(2): 99—112.
- [8] WOOD D M, BELKHEIR K, LIU D F. Strain softening and state parameter for sand modeling[J]. *Geotechnique*, 1994, 44(2): 335—339.
- [9] LI X S, DAFALIAS Y F. Dilatancy for Cohesionless Soils[J]. *Geotechnique*, 2000, 50(4): 449—460.
- [10] CAI Z Y. A comprehensive study of state-dependent dilatancy and its application in shear band formation analysis[D]. Hong Kong: Hong Kong Univ. of Sci. & Tech., 2001.