



不可压缩流动的高精度非标准格子玻尔兹曼方法

马超 吴杰

A high-order off-lattice Boltzmann method for incompressible flows

MA Chao, WU Jie

引用本文:

马超, 吴杰. 不可压缩流动的高精度非标准格子玻尔兹曼方法[J]. 空气动力学学报, 2022, 40(3): 65–74. DOI: 10.7638/kqdlxxb-2021.0243

MA Chao, WU Jie. A high-order off-lattice Boltzmann method for incompressible flows[J]. *Acta Aerodynamica Sinica*, 2022, 40(3): 65–74. DOI: 10.7638/kqdlxxb-2021.0243

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7638/kqdlxxb-2021.0243>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

多相流系统的离散玻尔兹曼研究进展

Progress of discrete Boltzmann study on multiphase complex flows

空气动力学学报. 2021, 39(3): 138–169 <https://doi.org/10.7638/kqdlxxb-2021.0021>

可压缩多介质流动问题的高精度数值模拟方法

High-order numerical simulation method for compressible multi-material flow problems

空气动力学学报. 2021, 39(1): 177–190 <https://doi.org/10.7638/kqdlxxb-2020.0165>

非结构网格紧致高精度气体动理学格式

Compact high-order gas-kinetic scheme on unstructured meshes

空气动力学学报. 2021, 39(1): 191–200 <https://doi.org/10.7638/kqdlxxb-2020.0192>

基于浸润边界-格子玻尔兹曼通量求解器的柔性结构流固耦合数值模拟

Fluid-structure interaction simulation for elastic structures based on immersed boundary-lattice Boltzmann flux solver

空气动力学学报. 2019, 37(5): 705–714 <https://doi.org/10.7638/kqdlxxb-2018.0167>

不可压壁湍流中基本相干结构

On elementary coherent structures in incompressible wall-bounded turbulence

空气动力学学报. 2020, 38(1): 83–99 <https://doi.org/10.7638/kqdlxxb-2019.0117>

低雷诺数下展弦比对仿生拍动翼推进性能的影响研究

Investigation on the influence of aspect ratio on the thrust performance of bionic motion wing under low Reynolds number

空气动力学学报. 2018, 36(1): 156–162 <https://doi.org/10.7638/kqdlxxb-2017.0147>

地址: 四川省绵阳市二环路南段8号11信箱9分箱

电话: 0816-2463375

Email: kqdlxxb@163.com

网址: <http://kqdlxxb.xml-journal.net/>



关注微信公众号
获得更多资讯信息

文章编号: 0258-1825(2022)03-0065-10

不可压缩流动的高精度非标准格子玻尔兹曼方法

马超, 吴杰*

(南京航空航天大学 航空学院, 南京 210016)

摘要: 首先回顾了高精度非标准格子玻尔兹曼方法的发展历程, 基于高精度通量重构格式, 发展了一种通量重构格子玻尔兹曼方法(FRLBM)。采用两种求解方法: 一种是将碰撞项隐式处理, 直接求解离散速度玻尔兹曼方程(直接法); 另一种是先执行碰撞步, 再求解纯对流方程(分步法)。通过收敛性研究, 比较了这两种方法的精度和稳定性。研究结果表明, 在小时间步长下两种方法误差近似, 都能取得高阶精度; 然而当时间步长增大, 直接法误差几乎不变, 分步法误差出现明显上升。由此表明, 当取得近似误差时, 直接法可以采用较大时间步长, 计算效率更高, 且直接法的稳定性略占优。接着通过模拟顶盖驱动方腔流验证了 FRLBM 捕捉流场细节的能力, 并且比较了基于半隐格式的显式方法和一阶、二阶及三阶隐式-显式 Runge-Kutta 格式的时间离散, 在不同雷诺数下的最大允许 Courant-Friedrichs-Lewy 数, 数值结果表明二阶隐式-显式 Runge-Kutta 格式效果最优。最后数值模拟了圆柱绕流, 验证了 FRLBM 计算复杂外形绕流的可靠性。

关键词: 高阶精度; 通量重构; 格子玻尔兹曼方法; 时间离散; 不可压缩流动

中图分类号: O357.1 文献标识码: A doi: 10.7638/kqdlxxb-2021.0243

A high-order off-lattice Boltzmann method for incompressible flows

MA Chao, WU Jie*

(College Of Aerospace Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: This paper firstly reviews the development of the high-order off-lattice Boltzmann method (OLBM). Based on the high-order flux reconstruction scheme (FR), we develop a high-order flux reconstruction lattice Boltzmann method (FRLBM). Two numerical methods are adapted. One is to directly solve the discrete velocity Boltzmann equation with collision term treated implicitly (direct method) and the other is to sequentially implement collision step and the convection term (two-step method). Through the convergence study, the accuracy and stability of the two methods are compared. It is found that, when the time step is small, the errors of the two methods are in similar order, and the high-order accuracy can be obtained. However, when the time step is increased, the error of the direct method is almost unchanged, while the error of the two-step method increases significantly. The results indicate that the direct method can use a larger time step to obtain higher accuracy to obtain the reasonable accuracy in comparing with two step method. Meanwhile, the direct method also has better stability. Then, the ability of FRLBM to capture the details of the flow field is verified by simulating the lid-driven cavity flow. In addition, we compare the maximum Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) numbers at different Reynolds numbers by semi-implicit time-marching scheme, first, second and third-order implicit-explicit (IMEX) Runge-Kutta schemes, respectively. The numerical results indicate the second-order IMEX performs best. Finally, the numerical simulation of the flow over a circular cylinder verifies the reliability of the FRLBM for calculation of the flow around the body with complex geometry.

Keywords: high-order accuracy; flux reconstruction; lattice Boltzmann method; time discretization; incompressible flows

收稿日期: 2021-09-13; 修订日期: 2021-11-02; 录用日期: 2021-11-11; 网络出版时间: 2021-12-11

基金项目: 国家自然科学基金(12072158)

作者简介: 马超(1994-), 男, 江苏扬州人, 博士研究生, 研究方向: 高精度格子玻尔兹曼方法. E-mail: machaosxm@163.com

通信作者: 吴杰*(1979-), 男, 江苏宜兴人, 教授, 研究方向: 计算空气动力学. E-mail: wuj@nuaa.edu.cn

引用格式: 马超, 吴杰. 不可压缩流动的高精度非标准格子玻尔兹曼方法[J]. 空气动力学学报, 2022, 40(3): 65-74.

MA C, WU J. A high-order off-lattice Boltzmann method for incompressible flows[J]. Acta Aerodynamica Sinica, 2022, 40(3): 65-74(in Chinese). doi: 10.7638/kqdlxxb-2021.0243

0 引言

在过去的三十年间, LBM 已经被发展到诸多领域,除了作为可压、不可压 Navier-Stokes (N-S) 方程的替代工具,还可以用作其他偏微分方程的解法器。尤其是在不可压流动模拟方面, LBM 被广泛认为是一种简单高效的数值工具。标准 LBM 的碰撞迁移过程使得编程简单、易于并行、数值耗散低。然而,这样的求解方式也存在一些不足。例如,物理空间和离散速度空间的耦合导致标准 LBM 必须使用均匀笛卡尔网格,对复杂外形的几何适应性差,时间步长和空间步长必须一致,即 Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) 数为 1,标准的单松弛 BGK (Bhatnagar-Gross-Krook) 格式在高雷诺数情况下数值稳定性差。此外,尽管 LBM 的数值耗散低,然而它始终还是只有二阶空间精度。应用 LBM 进行湍流模拟往往需要大量的网格,计算效率低。提高标准 LBM 的精度是较为困难的,目前主要的策略是对速度空间高阶离散或者对平衡态函数高阶展开。这些不足给 LBM 应用到高速、复杂外形的工程问题造成了一定困难。

格子玻尔兹曼方程 (LBE) 可以看作是离散速度玻尔兹曼方程 (DVBE) 的一种差分格式。已证明,物理对称性和格子对称性可以分开处理^[1],物理空间的离散可以独立于速度空间的离散,这样就可以将离散速度和计算网格进行解耦。在这一思想指导下建立起来的方法一般称为非标准格子玻尔兹曼方法 (OLBM)。OLBM 主要分为两大类,一类是在欧拉框架下采用传统的数值离散方法,比如利用有限差分^[2]、有限体积^[3]、有限元法^[4]直接求解 DVBE (以下称为欧拉法);另一类是在半拉格朗日 (semi-Lagrangian) 框架下借助插值方法实现粒子分布函数的演化 (以下称为半拉格朗日法)^[5-7]。早期的 OLBM 大多只有二阶精度,并且相比标准 LBM 会引入更大的数值耗散。近十多年来,高精度格式开始引起学者们的广泛关注。这类格式拥有较小的数值耗散,在多尺度流动的模拟上具有明显优势,例如湍流、气动噪声。和低精度的格式相比,高精度格式在取得相同误差条件下需要的网格要少得多,因而提高了计算效率。利用高精度格式求解 N-S 方程数值模拟不可压流的算法一般较为复杂,主要因为 N-S 方程的对流项是非线性,黏性项包含二阶偏导数,以及压强和速度的耦合。最常用的投影法或者压强修正法都需要求解压强泊松方程,该方程不容易收敛。非线性的对流项对于通过插值基函数在网格单元内构造数值解高阶多项式的高

精度方法来说,还可能会产生混淆误差。而 DVBE 可以看成一组线性偏微分方程,它的曲线坐标形式相比 N-S 方程也要简洁得多,所以用高精度格式求解 DVBE 要容易得多。事实上,相关工作早在 21 世纪初就有展开。Shi 等^[8]采用间断伽辽金谱元法求解 DVBE; Düster 等^[9]也发展了一种间断伽辽金格子玻尔兹曼法。然而,由于这两种方法缺少网格收敛性研究,它们的收敛阶能否取得高阶并不清楚。后来,Hejranfar 和 Ezzatneshan^[10-11]提出了一种紧致有限差分格子玻尔兹曼法 (CFDLBM) 并做了收敛性分析,验证了该方法能够取得四阶精度。由于中心型的紧致有限差分格式没有数值耗散,为了确保计算的稳定,必须引入过滤器。他们将 CFDLBM 和标准 LBM 做了比较,当取得相似的误差时,CFDLBM 的效率更高。为了避免过滤操作、简化计算过程,后续又有相关工作采用带有数值耗散的高阶差分格式。如利用五阶 WENO 格式^[12]以及五阶迎风型紧致有限差分格式^[13]求解 DVBE。有限差分对于复杂外形的几何适应性较差,为了改进这一问题, Li^[14]将高精度谱差分方法 (SD) 和 DVBE 结合,提出了 SDLBM。通过坐标变换形函数,SDLBM 可以应用非结构网格。Li 对 SDLBM 做了详细的收敛性分析,证明了在被压缩性误差影响之前,SDLBM 可以获得高阶精度,并且算法简单、易于并行。

以上这些方法的时间离散都采用显式格式。当雷诺数较高时, DVBE 碰撞项的刚性将严重限制时间步长,大大降低计算效率。目前应对这种问题的方法主要有两种,一种是将碰撞项隐式处理,直接求解 DVBE (以下称为直接法),常用的方法有 Guo 和 Zhao^[15]提出的基于半隐格式的显式方法和隐式-显式 Runge-Kutta 方法 (IMEX) 等^[16];另一种是将计算分为两步 (以下称为分步法),首先执行碰撞步,这和标准 LBM 一样,然后在迁移步采用高精度格式求解一个纯对流方程。通过这种方法学者们也提出了不同的高精度 OLBM,如 Min 和 Lee^[17]提出的谱元间断伽辽金格子玻尔兹曼法以及 Zadehgo 等^[18]提出的节点间断伽辽金格子玻尔兹曼法。然而,鲜有文献比较分步法和碰撞项隐式处理的直接法之间的数值表现。

另一种构造高精度 OLBM 的思路是在半拉格朗日框架下采用高阶插值^[19]。由于不需要求解对流方程,没有 CFL 条件的限制,这种方法能在大时间步长下保持稳定,并且每个时间步空间算子 (插值) 只演化一次,因此这种方法计算效率较高。然而事实上,半拉格朗日法误差和时间步长是成正比的。要想获得高精度,还是需要取较小的时间步长。此外,半拉格

朗日法的离散误差相比分步法要更大^[20]。因此, 这几种高精度 OLBM 的优劣依然值得进一步讨论。

本文将最近较为流行的通量重构(FR)格式引入 OLBM, 发展了一种高阶通量重构格子玻尔兹曼方法(FRLBM)。FR 格式为多种单元内多自由度的高阶格式, 如节点间断有限元(NDG)和 SD, 提供了一个统一的框架^[21], 且算法更加简单, 计算效率更高^[22]。在 FRLBM 的框架下, 本文比较了直接法和分步法的精度以及稳定性, 并且对比了基于半隐格式的显式方法和一阶 IMEX、二阶 IMEX 以及三阶 IMEX 对不同雷诺数下 CFL 数取值的影响。研究结果旨在进一步加深对高精度 OLBM 的认识, 为发展更加高效高精度的 OLBM 提供参考。

1 FRLBM 计算方法

1.1 控制方程

采用 BGK 近似的 DVBE 为:

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \mathbf{e}_a \cdot \nabla f_a = -\frac{(f_a - f_a^{\text{eq}})}{\tau} \quad (1)$$

其中, f_a 为粒子分布函数, 下标 a 表示离散的粒子速度方向; $\mathbf{e}_a$ 为粒子速度矢量; τ 为松弛时间; 为了减少压缩性误差, 采用 He-Luo 不可压模型^[23], 平衡态分布函数 f_a^{eq} 定义为:

$$f_a^{\text{eq}} = \omega_a \left[p + p_0 \left(\frac{\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{u}}{c_s^2} + \frac{(\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{u})^2}{2c_s^4} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2c_s^2} \right) \right] \quad (2)$$

其中, ω_a 为权系数; p_0 为参考压强, 直接设为 1; 流体宏观压强 p 和宏观速度 $\mathbf{u}$ 可以由下式求得:

$$p = \sum f_a, \quad p_0 \mathbf{u} = \sum \mathbf{e}_a f_a \quad (3)$$

本文采用 D2Q9 离散速度模型, 相应的离散速度和权系数为:

$$\mathbf{e}_a = \begin{cases} (0, 0), & \alpha = 0 \\ (\pm 1, 0), (0, \pm 1), & \alpha = 1 \sim 4 \\ (\pm 1, \pm 1), & \alpha = 5 \sim 8 \end{cases} \quad (4)$$

$$\omega_a = \begin{cases} 4/9, & \alpha = 0 \\ 1/9, & \alpha = 1 \sim 4 \\ 1/36, & \alpha = 5 \sim 8 \end{cases} \quad (5)$$

此时, $\tau = \nu/c_s^2$, 由流体黏性系数 ν 和声速 $c_s = 1/\sqrt{3}$ 计算得到。

直接法求解的方程为式(1), 而分步法则先采用 θ 方法将式(1)在时间区间 $[t, t + \Delta t]$ 沿特征线方向积分, 得到^[17]:

$$f_a|_{(\mathbf{x} + \mathbf{e}_a \Delta t, t + \Delta t)} - f_a|_{(\mathbf{x}, t)} = \frac{\theta}{\tau'} (f_a^{\text{eq}} - f_a) \Big|_{(\mathbf{x}, t)} + \frac{1 - \theta}{\tau'} (f_a^{\text{eq}} - f_a) \Big|_{(\mathbf{x} + \mathbf{e}_a \Delta t, t + \Delta t)} \quad (6)$$

上式 θ 取为 0.5 以获得二阶时间精度, $\tau' = \tau/\Delta t$, Δt 为时间步长。为消除碰撞项的隐式, 定义一个新的分布函数:

$$\bar{f}_a = f_a + \frac{f_a - f_a^{\text{eq}}}{2\tau'} \quad (7)$$

由上式可得:

$$\bar{f}_a^{\text{eq}} = f_a^{\text{eq}} \quad (8)$$

因此, 式(6)可以重写为:

$$\bar{f}_a(\mathbf{x}, t) - \bar{f}_a(\mathbf{x} - \mathbf{e}_a \Delta t, t - \Delta t) = -\frac{1}{\tau' + 0.5} (\bar{f}_a - \bar{f}_a^{\text{eq}}) \Big|_{(\mathbf{x} - \mathbf{e}_a \Delta t, t - \Delta t)} \quad (9)$$

对式(9)的求解分为两步, 首先执行碰撞步^[17]:

$$\hat{f}_a = \bar{f}_a - \frac{\bar{f}_a - \bar{f}_a^{\text{eq}}}{\tau' + 0.5} \quad (10)$$

接着求解以下的纯对流方程:

$$\frac{\partial \hat{f}_a}{\partial t} + \mathbf{e}_a \cdot \nabla \hat{f}_a = 0 \quad (11)$$

本文采用高精度 FR 格式对式(1)和式(11)进行空间离散。

1.2 空间离散

本文仅讨论四边形单元下 FR 格式, 考虑以下的二维守恒律:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(w) = 0 \quad (12)$$

其中, $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$ 为通量矢量, F_x 、 F_y 分别为通量在 x 、 y 方向上的分量。

将空间划分为相互不重叠的四边形网格单元。为了在每个四边形单元采用统一的插值函数, 简化计算过程, 首先需要把不规则的单元映射到标准单元 $[-1, 1] \times [-1, 1]$ 上, 每个求解点在标准单元的坐标是一致的。物理空间全局坐标系采用 (x, y) , 标准单元计算域局部坐标系采用 (ξ, η) , 它们之间的可逆转换关系为:

$$\begin{pmatrix} x(\xi, \eta) \\ y(\xi, \eta) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^K M_i(\xi, \eta) \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \quad (13)$$

式中, K 表示定义该网格单元的节点数量, M 为坐标转换函数。根据坐标变换关系, 守恒方程(12)在标准单元下的表达式为:

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + \nabla \cdot \tilde{\mathbf{F}} = \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{F}_x}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{F}_y}{\partial \eta} = 0 \quad (14)$$

式中,

$$\tilde{w} = |\mathbf{J}|w, \quad \begin{bmatrix} \tilde{F}_x \\ \tilde{F}_y \end{bmatrix} = |\mathbf{J}| \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} \quad (15)$$

其中雅克比矩阵 $\mathbf{J}$ 定义为:

$$\mathbf{J} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)} = \begin{pmatrix} x_\xi, x_\eta \\ y_\xi, y_\eta \end{pmatrix} \quad (16)$$

为了在单元内构造高阶的连续通量插值多项式,需要定义两类点集,即求解点和通量点。求解点本文应用 Gauss-Legendre 点,通量点为每个方向上的边界点。三阶 FR 方法的标准单元如图 1 所示。

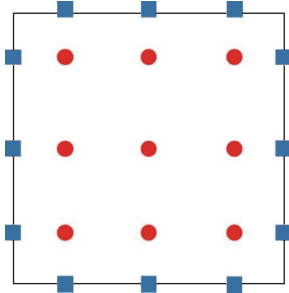


图 1 三阶 FR 方法标准单元求解点 (圆形) 和通量点 (正方形) 分布

Fig. 1 Arrangement of the solution points (circles) and the interface flux points (squares) in a standard element for the third-order FR method

以 ξ 方向的通量为例,通过两个一维拉格朗日插值基函数的张量积可以构造出二维的通量插值多项式:

$$\tilde{F}_x(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \tilde{F}_{i,j} [l_i(\xi) \cdot l_j(\eta)] \quad (17)$$

其中, N 为一维方向上的求解点个数, $\tilde{F}_{i,j}$ 为单元内 ξ 方向第 i 个、 η 方向上第 j 个求解点处的通量, l 为拉格朗日插值基函数。由拉格朗日插值基函数的性质可知,对于单元内每一个固定的 η , 沿着 ξ 方向问题可以简化为一维,即:

$$\tilde{F}_x(\xi) = \sum_{i=1}^N \tilde{F}_i l_i(\xi) \quad (18)$$

以上的通量多项式并没有考虑单元间的作用,因此,它在单元边界是间断的。为了重新构造单元间连续的通量多项式,需要引入左右边界的公共通量 $(\tilde{F}_x)_{i-\frac{1}{2}}^{\text{com}}$ 和 $(\tilde{F}_x)_{i+\frac{1}{2}}^{\text{com}}$ 进行修正,采用迎风数值通量 Roe 格式^[24]计算公共通量。定义修正后的通量多项式为 $\tilde{F}_x^c(\xi)$, 其表达式为:

$$\begin{aligned} \tilde{F}_x^c(\xi) = & \tilde{F}_x(\xi) + \left[(\tilde{F}_x)_{i-\frac{1}{2}}^{\text{com}} - \tilde{F}_x(-1) \right] g_L(\xi) + \\ & \left[(\tilde{F}_x)_{i+\frac{1}{2}}^{\text{com}} - \tilde{F}_x(1) \right] g_R(\xi) \end{aligned} \quad (19)$$

其中 g_L 和 g_R 分别为左右边界的修正函数。这个函数是 FR 方法的关键,影响着格式的精度和稳定性。它是一个 N 阶多项式,即通量多项式的阶数等于一维方向求解点的数目。本文采用 Vincent 等提出的 Vincent-Castonguay-Jameson-Huynh (VCHJ) 格式修正函数,通过调整函数中的一个参数,使得 FR 方法可以恢复 NDG、SD 以及 Huynh 的 g_2 方案^[25]。并且,该格式被证明用来解线性对流方程以及对流扩散方程任意阶都稳定^[21,26],具体形式参见文献^[21]。为了表述方便,称采用 N 阶通量多项式的通量重构格子玻尔兹曼法为 p^N FRLBM。

最终,对式(19)两边同时关于 ξ 求导,得到:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{F}_x^c}{d\xi}(\xi) = & \frac{d\tilde{F}_x}{d\xi}(\xi) + \left[(\tilde{F}_x)_{i-\frac{1}{2}}^{\text{com}} - \tilde{F}_x(-1) \right] \frac{dg_L}{d\xi}(\xi) + \\ & \left[(\tilde{F}_x)_{i+\frac{1}{2}}^{\text{com}} - \tilde{F}_x(1) \right] \frac{dg_R}{d\xi}(\xi) \end{aligned} \quad (20)$$

1.3 时间离散

如果采用显式时间离散格式求解方程(1),每个单元 i 的时间步长受限于 CFL 条件以及碰撞松弛时间,如下式所示:

$$\Delta t_i = \sigma \min \left(\frac{\sqrt{V_i}}{\Lambda_i}, 2\tau \right) / (2N+1) \quad (21)$$

其中 σ 、 V_i 和 Λ_i 分别为 CFL 数、单元 i 的体积和对流谱半径。为摆脱松弛时间的限制,本文用两种方法,一种是 Guo 和 Zhao 提出的基于半隐格式的显式方法,具体实施方法如下。在时间区间 $[t_n, t_{n+1}]$ 对方程(1)进行积分可得:

$$f_a^{n+1} - f_a^n + \Delta t \mathbf{e}_a \cdot \nabla f_a^n = \Delta t \left[\theta \Omega_a^{n+1} + (1-\theta) \Omega_a^n \right] \quad (22)$$

其中, Ω_a 为右端碰撞项, θ 取为 1/2。引入一个新的分布函数来消除碰撞项中的隐式:

$$g_a = f_a - \frac{1}{2} \Delta t \Omega_a \quad (23)$$

式(22)重写为:

$$g_a^{n+1} = f_a^n - \Delta t \mathbf{e}_a \cdot \nabla f_a^n + \frac{1}{2} \Delta t \Omega_a^n \quad (24)$$

$n+1$ 时刻的宏观量可以对 g_a^{n+1} 求矩获得;接着, f_a^{n+1} 可以由下式求得:

$$f_a^{n+1} = \frac{g_a^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\tau} (f_a^{\text{eq}})^{n+1}}{1 + \frac{\Delta t}{2\tau}} \quad (25)$$

其中 $(f_a^{\text{eq}})^{n+1}$ 可以由 $n+1$ 时刻的宏观量代入式(2)求得。

另一种方法是隐式-显式 Runge-Kutta 法, 其表达式如下:

$$f_a^{(j)} = f_a^n - \Delta t \sum_{k=1}^{j-1} \tilde{m}_{jk} (e_a \cdot \nabla f_a^{(k)}) - \Delta t \sum_{k=1}^j m_{jk} \frac{f_a^{(k)} - f_a^{\text{eq}(k)}}{\tau} \quad (26)$$

$$f_a^{n+1} = f_a^n - \Delta t \sum_{j=1}^r \tilde{n}_j (e_a \cdot \nabla f_a^{(k)}) - \Delta t \sum_{j=1}^r n_j \frac{f_a^{(k)} - f_a^{\text{eq}(k)}}{\tau} \quad (27)$$

其中, $f_a^{(j)}$ 和 $f_a^{\text{eq}(j)}$ 分别为中间第 j 步的分布函数和平衡态, $\tilde{m}_{jk}$ 、 m_{jk} 、 $\tilde{n}_j$ 、 n_j 为格式系数。式(26)等号右边第三项的隐式部分可以利用碰撞不变量的特性消除, 格式的具体细节和不同精度的格式系数可以参见文献[16]。对方程(11)的时间推进则采用常用的三阶强稳定性 Runge-Kutta 法。最终的时间步长选取仅受 CFL 条件限制, 如下式所示:

$$\Delta t_i = \sigma \min \left(\frac{\sqrt{V_i}}{\Lambda_i} \right) / (2N+1) \quad (28)$$

1.4 边界条件

本文数值算例中涉及的无滑移壁面及远场边界处理, 采用非平衡态外推的方法[27], 将边界上的分布函数写成平衡态和非平衡态之和的形式:

$$(f_a)_b = (f_a^{\text{eq}})_b + (f_a^{\text{neq}})_b \quad (29)$$

其中, 下标 b 表示边界, 上标 neq 表示非平衡态。平衡态可以根据边界的宏观量直接求得, 而非平衡态可以由求解点的非平衡态通过拉格朗日插值得到。一旦得到边界上的分布函数, 就可以直接计算出边界通量, 然后通过式(19)将边界的影响考虑进来。

2 数值算例

2.1 Taylor-Green 涡

Taylor-Green 涡问题被广泛用来研究非定常不可压流动算法的收敛性, 这个问题的解析解为:

$$\begin{cases} u^*(x, y, t) = -U_0 \cos(2\pi x) \sin(2\pi y) \exp(-8\pi^2 \nu t) \\ v^*(x, y, t) = U_0 \sin(2\pi x) \cos(2\pi y) \exp(-8\pi^2 \nu t) \\ p^*(x, y, t) = -\frac{U_0^2}{4} [\cos(4\pi x) + \cos(4\pi y)] \exp(-16\pi^2 \nu t) \end{cases} \quad (30)$$

其中 U_0 为初始速度, 为了减少格子玻尔兹曼的压缩性误差, 取为 0.001。计算域为一个边长为 1 的正方形, 所有边界为周期性条件。雷诺数 Re 取为 10, 初始的

速度场和压强场可以由式(30)取 $t=0$ 获得, 网格为均匀网格。 x 方向速度的相对误差 L_2 定义为:

$$L_2(t) = \|u(t) - u^*(t)\|_2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_{\text{total}}} [u_i(t) - u_i^*(t)]^2}{\sum_{i=1}^{N_{\text{total}}} [u_i^*(t)]^2}} \quad (31)$$

其中, N_{total} 为求解点总数, $u_i(t)$ 为数值解, $u_i^*(t)$ 为解析解, 时间取 $t_h = \ln 2 / (8\nu\pi^2)$ 。为减少时间离散误差, 时间步长取 0.0002。本文比较了直接法与分步法的数值表现, 其中直接法时间离散采用二阶 IMEX。不同网格单元计算得到的误差和收敛精度阶见表 1。从表中可知, 误差会收敛到一个固定值, 这是模型的压缩性误差导致的, 这一现象在其他高精度 OLBM 中同样存在[13-14]。在被压缩性误差影响前, 直接法和分步法都能获得高阶收敛阶, 并且直接法与分步法的误差及收敛阶几乎一致。以上结论是基于一个较小时时间步长得到的, 为了比较不同时间步长对两种方法结果的影响, 图 2 给出了不同 CFL 数 σ 下、网格单元为 16×16 时, p^3 FRLBM 直接法和分步法的相对误差和计算时间, 时间步长由式(28)算得。从图 2 可以看到, CFL 数较小时两种方法误差几乎一致。但当 CFL 数增加, 直接法的误差几乎不变, 而分步法明显上升。这是由于分步法的对流方程可以看成是拉格朗日迁移的一种欧拉表达[28], 标准 LBM 迁移是该对流方程不引入任何相位和幅值误差的精确解。当 CFL 数取 0.7 时, 直接法的计算时间为 19 s; 而要取得与之接近的误差, 分步法的 CFL 数最大取 0.3, 此时分步法计算时间为 28 s。从这个结果可以看出, 取得相似误差时, 直接法能取更大的时间步长, 效率更高。此外, 直接法的最大 CFL 数可以取到 0.85, 而分步法最大只能取到 0.7。因此, 直接法的稳定性更好。

2.2 顶盖驱动方腔流

顶盖驱动方腔流因为其流动结构丰富、流场变化受雷诺数影响明显的特点, 是不可压流算法的经典校核算例之一。在本算例中, 计算域是一个边长 L 为 1 的方腔, 顶盖驱动速度 u_0 为 0.1, 其他三个边为无滑移壁面, 计算的雷诺数定义为 $Re = u_0 L / \nu$, 本文计算的四个稳态 Re 分别为 3200、5000、7500 和 10000。计算收敛的判据为:

$$\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{N_{\text{total}}} [(u^{t+\Delta t} - u^t)^2 + (v^{t+\Delta t} - v^t)^2]}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N_{\text{total}}} [(u^{t+\Delta t})^2 + (v^{t+\Delta t})^2]}} < 10^{-8} \quad (32)$$

表 1 直接法和分步法不同网格下的误差及收敛精度

Table 1 Error and convergence order of direct method and two-step method for different grid resolution

		p^3		p^4	
		L_2	收敛阶	L_2	收敛阶
直接法	$N_x \times N_y$				
	4×4	1.18×10^{-1}	-	1.50×10^{-2}	-
	8×8	1.47×10^{-2}	3.010	7.64×10^{-4}	4.295
	16×16	9.08×10^{-4}	4.018	1.50×10^{-4}	2.353
	32×32	1.55×10^{-4}	2.548	1.48×10^{-4}	0.010
分步法	64×64	1.48×10^{-4}	0.064	1.48×10^{-4}	0.000
	4×4	1.18×10^{-1}	-	1.50×10^{-2}	-
	8×8	1.47×10^{-2}	3.010	7.64×10^{-4}	4.295
	16×16	9.07×10^{-4}	4.018	1.50×10^{-4}	2.353
	32×32	1.55×10^{-4}	2.548	1.49×10^{-4}	0.010
	64×64	1.49×10^{-4}	0.064	1.49×10^{-4}	0.000

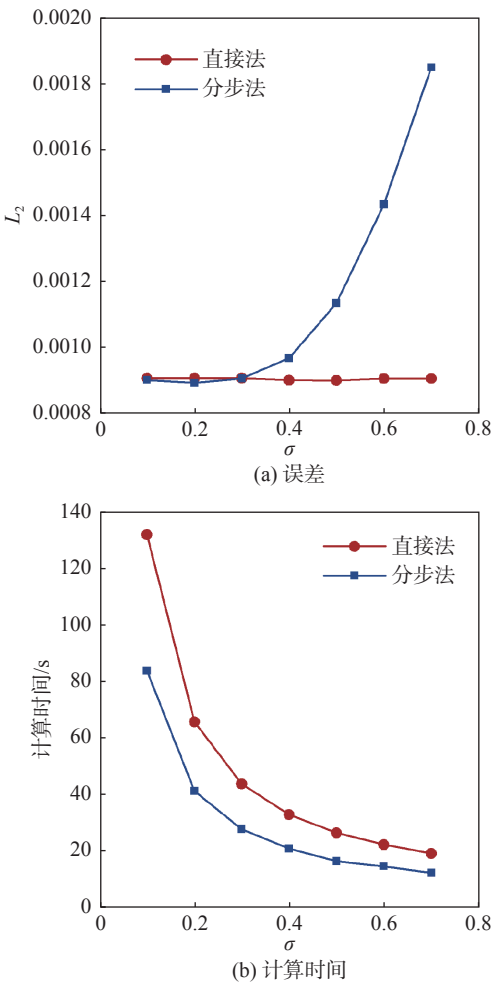


图 2 直接法和分步法不同 CFL 数下的误差和计算时间
Fig. 2 Errors and computational time at different CFL numbers
by direct method and two-step method

为了更好地捕捉方腔角落处的涡,采用非均匀网格:

$$x = \frac{1}{2a} [a + \tanh(\beta\xi)] \tag{33}$$

$$y = \frac{1}{2a} [a + \tanh(\beta\eta)] \tag{34}$$

其中, $a = \tanh\beta, \beta = 1.5$ 。当 $Re = 3200$, 采用的网格单元数为 30×30 ; 当 $Re = 5000$ 和 7500 , 采用的网格单元数为 40×40 ; 当 $Re = 10000$, 采用的网格单元数为 50×50 。 40×40 非均匀网格单元的分布如图 3 所示。图 4 为 p^4 FRLBM 计算得到的四个不同雷诺数下的流线。从图中可以看出, $Re = 3200$ 时右下角出现小涡, $Re = 5000$ 时左下角出现小涡。随着雷诺数的增加, 底角三级涡越来越明显。由于 FR 格式的高阶精度和高分辨率特性以及非均匀网格的使用, 这些流动细节被 FRLBM 清楚地捕获。图 5 定量比较了方腔中线的无量纲速度, 其中左侧纵坐标和右侧纵坐标分别为 x 方向和 y 方向无量纲速度。本文结果和相关文献^[10,12,29]吻合良好, 尽管本文采用了较少的网格单元。此外, 本文还比较了 4 种时间离散方式在 4 个 Re 下收敛所能取到的最大 CFL 数, 如图 6 所示。可以发现, 基于半隐格式的显式方法和一阶 IMEX 所能取到的最大 CFL 数相同, 为 0.25。并且, 随着雷诺数的增大, CFL 数降低。而二阶 IMEX 和三阶 IMEX 即

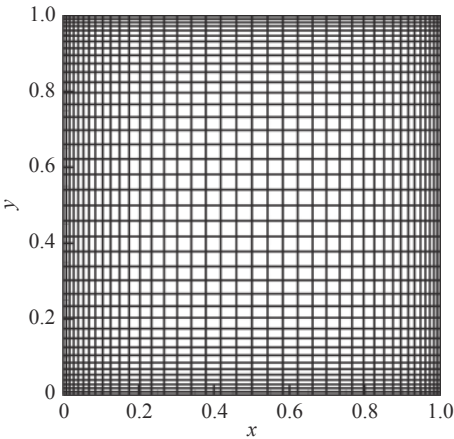


图 3 顶盖驱动方腔流 40×40 非均匀网格单元的分布
Fig. 3 Non-uniform mesh distribution with
 40×40 for lid-driven cavity flow

使在雷诺数较大时, CFL 数依然可以取为 1 附近, 且三阶 IMEX 最大 CFL 数略大于二阶 IMEX。考虑到

三阶 IMEX 要增加一步空间算子, 二阶 IMEX 是较好的时间离散方式。

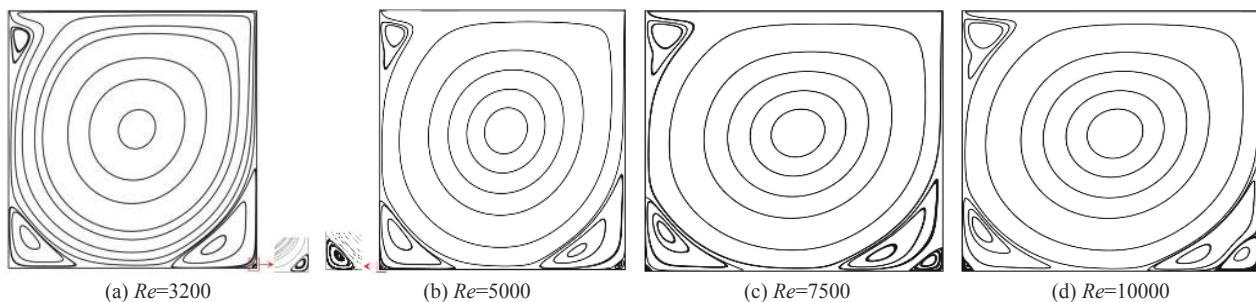


图4 顶盖驱动方腔流在 $Re = 3200$ 、 5000 、 7500 和 10000 时的流线图

Fig. 4 Streamlines for lid-driven cavity flow at $Re = 3200, 5000, 7500$ and 10000

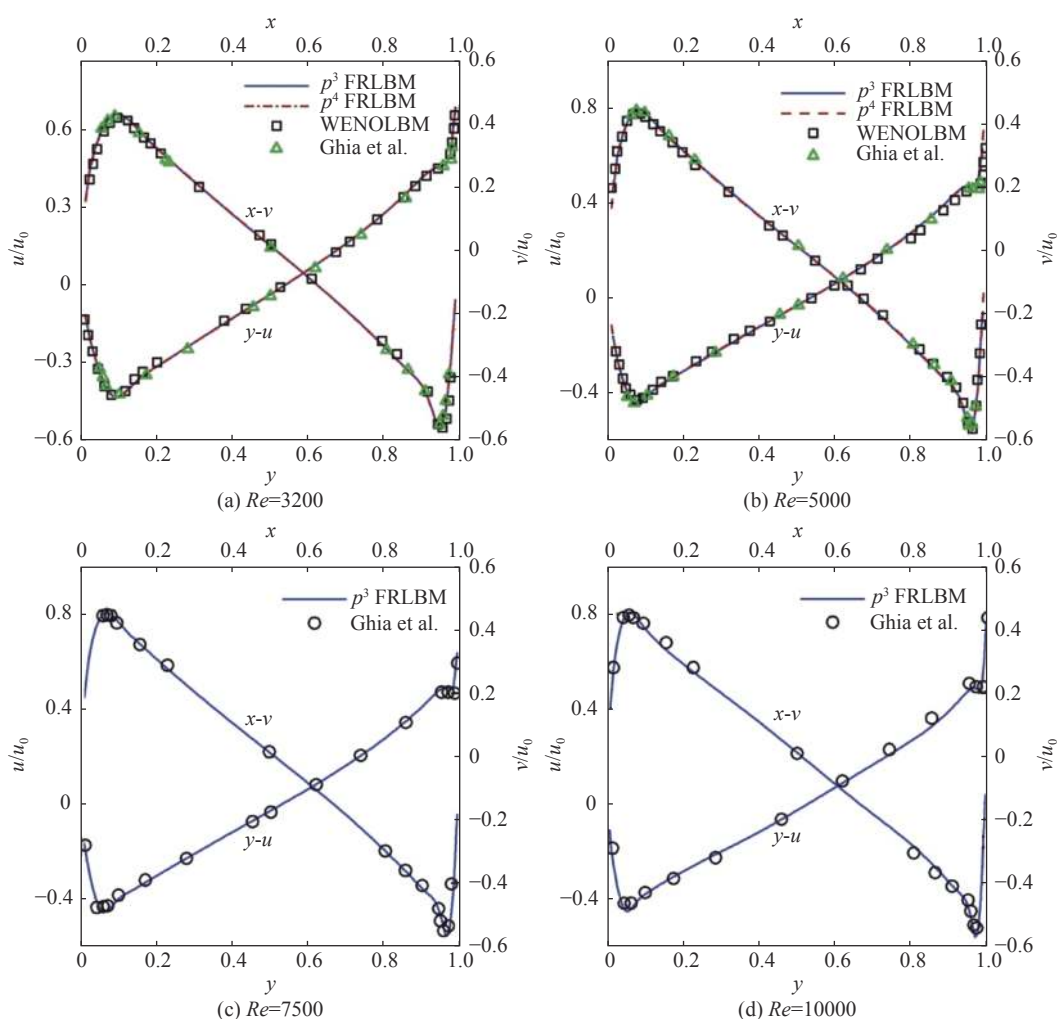


图5 顶盖驱动方腔流在 $Re = 3200$ 、 5000 、 7500 和 10000 时中线上的速度型比较

Fig. 5 Comparison of centerline velocity profiles for lid-driven cavity flow at $Re = 3200, 5000, 7500$ and 10000

2.3 圆柱绕流

圆柱绕流是验证算法模拟复杂外形绕流的经典算例之一, 本文计算了瞬态雷诺数 $Re = 200$ 的情况。采用沿径向延展的非均匀 O 型贴体网格, 网格单元为 1 次曲线单元, 即式(13)中的 $K = 8$ 。径向延展的变化由下式确定:

$$r_j = r_1 + (r_1 - r_0) \frac{\tanh(\beta \eta_j)}{\tanh \beta} \quad (35)$$

其中, r_0 为圆柱的半径, 取为 0.5; r_1 为圆形计算域的半径, 取为 50; $\eta_j = j/N_r - 1, j = 0, 1, \dots, N_r$; N_r 是径向网格单元的数量, 取为 60; 周向单元数量取为 40; $\beta = 3$ 。计算域及网格单元的分布如图 7 所示。图 8

给出了瞬时流线和涡量等值线,从图中可以观察到卡门涡街的脱落。升力系数 C_L 和阻力系数 C_D 随时间的周期性变化见图 9,由图可以观察到 C_D 的周期约

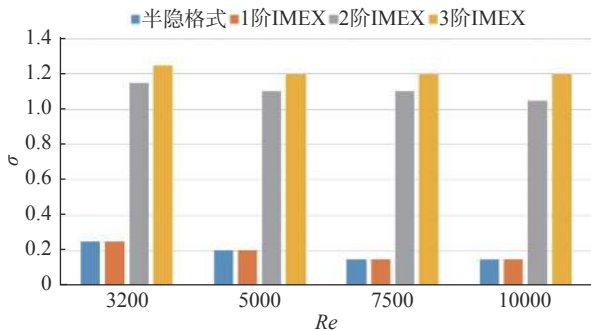


图 6 顶盖驱动方腔流在 $Re = 3200$ 、 5000 、 7500 和 10000 时四种时间离散格式的最大 CFL 数比较

Fig. 6 Comparison of maximum CFL numbers of the four time discretization methods for lid-driven cavity flow at $Re = 3200$, 5000 , 7500 and 10000

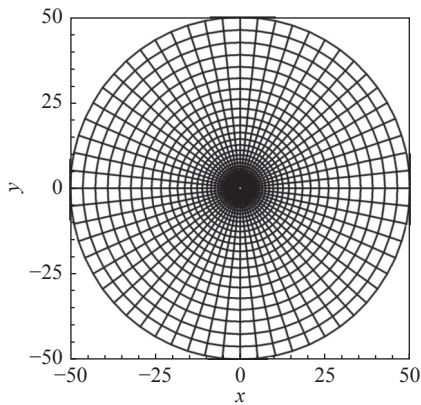


图 7 圆柱绕流计算域及贴体网格单元的分布

Fig. 7 Computational domain and body-fitted mesh distribution for flow over a circular cylinder

为 C_L 的一半。此外,将本文计算得到的 C_D 、 C_L ,以及斯特劳哈尔数 St 和相关文献^[7,11,30,31]做了定量比较,如表 2 所示,可以发现吻合良好。斯特劳哈尔数的定义为 $St = D/u_0 T_p$,其中 D 为圆柱直径, u_0 为来流速度, T_p 为 C_L 随时间变化的峰值周期。因此,本文的方法模拟复杂外形绕流是可靠的。

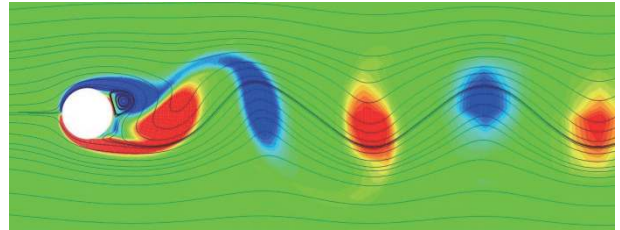


图 8 圆柱绕流 $Re = 200$ 时的瞬时流线及涡量等值线

Fig. 8 The instantaneous streamlines and vorticity contours for flow over a circular cylinder at $Re = 200$

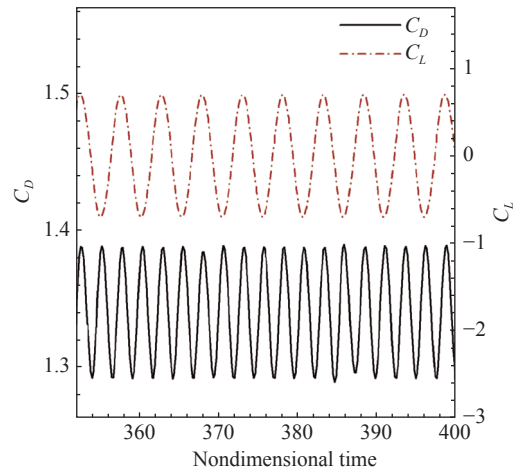


图 9 圆柱绕流 $Re = 200$ 时升阻力随时间的周期性变化

Fig. 9 Periodic variations of drag and lift coefficients for flow over a circular cylinder at $Re = 200$

表 2 圆柱绕流 $Re = 200$ 时结果和文献比较

Table 2 Comparison of the results of flow over a circular cylinder at $Re = 200$ with the available results.

数据来源	方法	C_D	C_L	St
Berger 和 Wille ^[30]	Experiment	1.30	-	0.19
Chiu 等 ^[31]	N-S	1.37 ± 0.051	± 0.71	0.198
Lin 等 ^[7]	RBF-SL-LBM	1.315 ± 0.045	± 0.68	0.197
Hejranfar 和 Ezzatneshan ^[11]	CFDLBM	1.329 ± 0.0439	± 0.6814	0.1941
本文	p^3 FRLBM	1.336 ± 0.046	± 0.6956	0.1936
本文	p^4 FRLBM	1.341 ± 0.05	± 0.6915	0.1938

3 结 论

OLBM 可以改善标准 LBM 的几何适应性,本文回顾了不可压流动高精度 OLBM 的发展过程。相比基于 N-S 方程的高精度不可压流算法,基于 DVBE 的高精度算法要容易实现得多。本文基于高精度通量重构格式发展了一种通量重构格子玻尔兹曼方法,并

在此框架下比较了直接求解 DVBE 和先碰撞、再求解纯对流方程这两种方法的数值表现。研究发现,在小时间步长下,这两种方法误差接近,采用高精度格式都能获得高阶的收敛阶。然而,当时间步长增大时,分步法的误差出现明显上升,而直接法误差几乎不变。数值测试显示,在取得相似误差时直接法能取更大的时间步长,运算周期较短、计算效率更高。此

外,采用二阶隐式-显式 Runge-kutta 推进的直接法,稳定性优于分步法。接着,通过顶盖驱动方腔流算例,比较了4种碰撞项隐式处理的时间推进方法在不同雷诺数下所能取到的最大 CFL 数。数值结果表明,二阶 IMEX 是较好的时间离散方法。然而,尽管 IMEX 能使时间步长的选取摆脱松弛时间的限制,但由于对流项依然显式处理,在模拟壁湍流问题时较小的边界层网格厚度同样会严重限制时间步长。因此,发展低存储、全隐式的时间推进方法是 OLBM 的重要发展方向之一,目前已有学者开展了一些工作^[32-33]。本文采用的碰撞模型是单松弛,为了增强稳定性,也可以采用更先进的碰撞模型,比如多松弛等。此外,高精度 OLBM 还可以直接拓展到湍流、多相流、热流等应用中^[34-35],目前相关工作正在开展中。

参 考 文 献:

- [1] HE X Y, LUO L S. Theory of the lattice Boltzmann method: from the Boltzmann equation to the lattice Boltzmann equation[J]. *Physical Review E*, 1997, 56: 6811–6817.
doi: 10.1103/PhysRevE.56.6811
- [2] MEI R W, SHYY W. On the finite difference-based lattice Boltzmann method in curvilinear coordinates[J]. *Journal of Computational Physics*, 1998, 143(2): 426–448.
doi: 10.1006/jcph.1998.5984
- [3] CHEN H D. Volumetric formulation of the lattice Boltzmann method for fluid dynamics: Basic concept[J]. *Physical Review E*, 1998, 58(3): 3955–3963.
doi: 10.1103/physreve.58.3955
- [4] LEE T, LIN C L. A characteristic Galerkin method for discrete Boltzmann equation[J]. *Journal of Computational Physics*, 2001, 171(1): 336–356.
doi: 10.1006/jcph.2001.6791
- [5] HE X Y, LUO L S, DEMBO M. Some progress in lattice Boltzmann method. Part I. Nonuniform mesh grids[J]. *Journal of Computational Physics*, 1996, 129(2): 357–363.
doi: 10.1006/jcph.1996.0255
- [6] SHU C, NIU X D, CHEW Y T. Taylor-series expansion and least-squares-based lattice Boltzmann method: Two-dimensional formulation and its applications[J]. *Physical Review E, Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 2002, 65(3 Pt 2B): 036708.
doi: 10.1103/PhysRevE.65.036708
- [7] LIN X J, WU J, ZHANG T W. A mesh-free radial basis function-based semi-Lagrangian lattice Boltzmann method for incompressible flows[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2019, 91(4): 198–211.
doi: 10.1002/fld.4749
- [8] SHI X, LIN J Z, YU Z S. Discontinuous Galerkin spectral element lattice Boltzmann method on triangular element[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2003, 42(11): 1249–1261.
doi: 10.1002/fld.594
- [9] DÜSTER A, DEMKOWICZ L, RANK E. High-order finite elements applied to the discrete Boltzmann equation[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2006, 67(8): 1094–1121.
doi: 10.1002/nme.1657
- [10] HEJRANFAR K, EZZATNESHAN E. A high-order compact finite-difference lattice Boltzmann method for simulation of steady and unsteady incompressible flows[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2014, 75(10): 713–746.
doi: 10.1002/fld.3916
- [11] HEJRANFAR K, EZZATNESHAN E. Implementation of a high-order compact finite-difference lattice Boltzmann method in generalized curvilinear coordinates[J]. *Journal of Computational Physics*, 2014, 267: 28–49.
doi: 10.1016/j.jcp.2014.02.030
- [12] HEJRANFAR K, SAADAT M H, TAHERI S. High-order weighted essentially nonoscillatory finite-difference formulation of the lattice Boltzmann method in generalized curvilinear coordinates[J]. *Physical Review E*, 2017, 95(2-1): 023314.
doi: 10.1103/physreve.95.023314
- [13] SUN Y X, TIAN Z F. High-order upwind compact finite-difference lattice Boltzmann method for viscous incompressible flows[J]. *Computers & Mathematics With Applications*, 2020, 80(7): 1858–1872.
doi: 10.1016/j.camwa.2020.08.014
- [14] LI W D. High order spectral difference lattice Boltzmann method for incompressible hydrodynamics[J]. *Journal of Computational Physics*, 2017, 345: 618–636.
doi: 10.1016/j.jcp.2017.05.039
- [15] GUO Z L, ZHAO T S. Explicit finite-difference lattice Boltzmann method for curvilinear coordinates[J]. *Physical Review E*, 2003, 67(6): 066709.
doi: 10.1103/physreve.67.066709
- [16] PIERACCINI S, PUPPO G. Implicit-explicit schemes for BGK kinetic equations[J]. *Journal of Scientific Computing*, 2007, 32(1): 1–28.
doi: 10.1007/s10915-006-9116-6
- [17] MIN M S, LEE T. A spectral-element discontinuous Galerkin lattice Boltzmann method for nearly incompressible flows[J]. *Journal of Computational Physics*, 2011, 230(1): 245–259.
doi: 10.1016/j.jcp.2010.09.024
- [18] ZADEHGOL A, ASHRAFI-ZAADEH M, MUSAVI S H. A nodal discontinuous Galerkin lattice Boltzmann method for fluid flow problems[J]. *Computers & Fluids*, 2014, 105: 58–65.
doi: 10.1016/j.compfluid.2014.09.015
- [19] KRÄMER A, KÜLLMER K, REITH D, et al. Semi-Lagrangian off-lattice Boltzmann method for weakly compressible flows[J]. *Physical Review E*, 2017, 95(2-1): 023305.
doi: 10.1103/PhysRevE.95.023305
- [20] KRÄMER A, WILDE D, KÜLLMER K, et al. Lattice Boltzmann simulations on irregular grids: Introduction of the NATrium library[J]. *Computers & Mathematics With Applications*, 2020, 79(1): 34–54.
doi: 10.1016/j.camwa.2018.10.041
- [21] VINCENT P E, CASTONGUAY P, JAMESON A. A new class of high-order energy stable flux reconstruction schemes[J]. *Journal of Scientific Computing*, 2011, 47(1): 50–72.
doi: 10.1007/s10915-010-9420-z
- [22] YU M L, WANG Z J, LIU Y. On the accuracy and efficiency of discontinuous Galerkin, spectral difference and correction procedure via reconstruction methods[J]. *Journal of Computational Physics*, 2014, 259: 70–95.
doi: 10.1016/j.jcp.2013.11.023
- [23] HE X Y, LUO L S. Lattice Boltzmann model for the incompressible Navier-Stokes equation[J]. *Journal of Statistical Physics*, 1997, 88(3-4): 927–944.
doi: 10.1023/B:JOSS.0000015179.12689.e4
- [24] ROE P L. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes[J]. *Journal of Computational Physics*, 1981, 43(2):

- 357–372.
doi: [10.1016/0021-9991\(81\)90128-5](https://doi.org/10.1016/0021-9991(81)90128-5)
- [25] HUYNH H T. A flux reconstruction approach to high-order schemes including discontinuous Galerkin methods[C]//18th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, Miami, Florida. Reston, Virginia: AIAA, 2007: 4079.
doi: [10.2514/6.2007-4079](https://doi.org/10.2514/6.2007-4079)
- [26] CASTONGUAY P, WILLIAMS D M, VINCENT P E, et al. Energy stable flux reconstruction schemes for advection-diffusion problems[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2013, 267: 400–417.
doi: [10.1016/j.cma.2013.08.012](https://doi.org/10.1016/j.cma.2013.08.012)
- [27] GUO Z L, ZHENG C G, SHI B C. Non-equilibrium extrapolation method for velocity and pressure boundary conditions in the lattice Boltzmann method[J]. *Chinese Physics*, 2002, 11: 366–374.
doi: [10.1088/1009-1963/11/4/310](https://doi.org/10.1088/1009-1963/11/4/310)
- [28] LEE T, LIN C L. An Eulerian description of the streaming process in the lattice Boltzmann equation[J]. *Journal of Computational Physics*, 2003, 185(2): 445–471.
doi: [10.1016/S0021-9991\(02\)00065-7](https://doi.org/10.1016/S0021-9991(02)00065-7)
- [29] GHIA U, GHIA K N, SHIN C T. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method[J]. *Journal of Computational Physics*, 1982, 48(3): 387–411.
doi: [10.1016/0021-9991\(82\)90058-4](https://doi.org/10.1016/0021-9991(82)90058-4)
- [30] BERGER E, WILLE R. Periodic flow phenomena[J]. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1972, 4(1): 313–340.
doi: [10.1146/annurev.fl.04.010172.001525](https://doi.org/10.1146/annurev.fl.04.010172.001525)
- [31] CHIU P H, LIN R K, SHEU T W H. A differentially interpolated direct forcing immersed boundary method for predicting incompressible Navier-Stokes equations in time-varying complex geometries[J]. *Journal of Computational Physics*, 2010, 229(12): 4476–4500.
doi: [10.1016/j.jcp.2010.02.013](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2010.02.013)
- [32] LI W D, LI W, SONG P, et al. A conservation-moment-based implicit finite volume lattice Boltzmann method for steady nearly incompressible flows[J]. *Journal of Computational Physics*, 2019, 398: 108882.
doi: [10.1016/j.jcp.2019.108882](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2019.108882)
- [33] GHAFFARIAN A, HEJRANFAR K. An implicit dual-time stepping spectral difference lattice Boltzmann method for simulation of viscous compressible flows on structured meshes[J]. *Meccanica*, 2019, 54(10): 1561–1581.
doi: [10.1007/s11012-019-01036-w](https://doi.org/10.1007/s11012-019-01036-w)
- [34] MA C, WU J, JIANG L. A weighted essentially nonoscillatory-based phase field lattice Boltzmann method for incompressible two-phase flows with high density contrast[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2021, 93(7): 2272–2290.
doi: [10.1002/fld.4973](https://doi.org/10.1002/fld.4973)
- [35] MA C, WU J, ZHANG T W. A high order spectral difference-based phase field lattice Boltzmann method for incompressible two-phase flows[J]. *Physics of Fluids*, 2020, 32(12): 122113.
doi: [10.1063/5.0033204](https://doi.org/10.1063/5.0033204)

(本文责编: 王颖 英文编审: 李青)