



WENO格式的一种新型光滑因子及其应用

刘旭亮 武从海 李虎 范召林

A new type of smoothness indicator for weighted essentially non-oscillatory schemes and its application

LIU Xuliang, WU Conghai, LI Hu, FAN Zhaolin

引用本文:

刘旭亮, 武从海, 李虎, 等. WENO格式的一种新型光滑因子及其应用[J]. 空气动力学学报, 2023, 41(5): 20–34. DOI: 10.7638/kqdlxxb-2022.0013

LIU Xuliang, WU Conghai, LI Hu, et al. A new type of smoothness indicator for weighted essentially non-oscillatory schemes and its application[J]. *Acta Aerodynamica Sinica*, 2023, 41(5): 20–34. DOI: 10.7638/kqdlxxb-2022.0013

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7638/kqdlxxb-2022.0013>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

自适应的高精度中心-WENO混合格式

An adaptive high-resolution hybrid scheme using central flux scheme and WENO scheme

空气动力学学报. 2019, 37(4): 541–545, 577 <https://doi.org/10.7638/kqdlxxb-2017.0050>

非结构网格上的TV-van Leer混合迎风格式

Hybrid TV-van Leer upwind scheme on unstructured grids

空气动力学学报. 2019, 37(5): 855–863 <https://doi.org/10.7638/kqdlxxb-2017.0109>

基于映射函数的中心型三阶格式

A kind of third order central scheme based on mapping functions

空气动力学学报. 2017, 35(1): 71–77 <https://doi.org/10.7638/kqdlxxb-2015.0172>

高精度有限差分格式的色散优化及耗散控制

The dispersion optimization and dissipation adjustment for high-order finite difference schemes

空气动力学学报. 2021, 39(1): 138–156 <https://doi.org/10.7638/kqdlxxb-2020.0153>

基于内嵌物理机理神经网络的热传导方程的正问题及逆问题求解

Solving forward and inverse problems of the heat conduction equation using physics-informed neural networks

空气动力学学报. 2021, 39(5): 19–26 <https://doi.org/10.7638/kqdlxxb-2020.0176>

一种用于间断装配的流场结构辨识算法

A surface extraction method of flow feature for shock-fitting scheme

空气动力学学报. 2019, 37(3): 373–381 <https://doi.org/10.7638/kqdlxxb-2017.0212>

地址: 四川省绵阳市二环路南段8号11信箱9分箱
电话: 0816-2463375
Email: kqdlxxb@163.com
网址: <http://kqdlxxb.xml-journal.net/>



关注微信公众号
获得更多资讯信息

文章编号: 0258-1825(2023)05-0020-15

WENO 格式的一种新型光滑因子及其应用

刘旭亮^{1,*}, 武从海¹, 李 虎¹, 范召林²

(1. 空气动力学国家重点实验室, 绵阳 621000;

2. 中国空气动力研究与发展中心, 绵阳 621000)

摘 要:光滑因子是构造 WENO 格式的关键, 决定了 WENO 格式能否达到最优收敛精度以及在间断附近能否保持本质无振荡特性。针对广泛应用的五阶 WENO 格式, 采用算子函数近似导数关系的方法, 设计了一种新型光滑因子。在间断区域, 与传统的光滑因子相比, 新型光滑因子对间断的识别更准确。在光滑区域, 新型光滑因子使得新型 WENO 格式的非线性权更接近线性权。理论分析和数值验证表明新型 WENO 格式即使在一阶临界点也能保持一致五阶精度。一维典型激波问题的数值结果表明, 与现有 WENO 格式相比, 新型 WENO 格式提高了短波的分辨率, 降低了格式的耗散, 同时能够准确识别间断。对于典型包含激波和剪切层的流动问题, 新型 WENO 格式不仅能够准确地捕捉强激波, 而且能够精细模拟剪切层和声波等流场结构。

关键词:WENO 格式; 光滑因子; 收敛精度; 非线性权; 捕捉激波

中图分类号: V211.3 文献标识码: A doi: 10.7638/kqdlxxb-2022.0013

A new type of smoothness indicator for weighted essentially non-oscillatory schemes and its application

LIU Xuliang^{1,*}, WU Conghai¹, LI Hu¹, FAN Zhaolin²

(1. State Key Laboratory of Aerodynamics, Mianyang 621000, China;

2. China Aerodynamics Research and Development Center, Mianyang 621000, China)

Abstract: The smoothness indicator determines whether WENO (weighted essentially-non-oscillatory) schemes can achieve the optimal convergence accuracy and maintain the essentially non-oscillatory characteristics near discontinuities; consequently, it is the key to constructing WENO schemes. This paper proposes a new type of smoothness indicator for the widely used fifth-order WENO scheme by the operator function method. Compared to existing smoothness indicators, this new smoothness indicator has two advantages: firstly, it quantifies the smoothness of stencils and identifies discontinuities more accurately in discontinuous regions; secondly, the nonlinear weights are closer to the linear weights in smooth regions. The resulting WENO scheme maintains the optimal fifth-order accuracy at the first-order critical point and has lower dissipation, better shock-capturing capability, and higher resolution for short waves than those using existing smoothness indicators. It, therefore, captures strong shock waves and flow structures such as shear layers and sound waves more accurately, suggesting the great potential of this smoothness indicator in simulating complex flows.

Keywords: WENO scheme; smoothness indicator; convergence order of accuracy; nonlinear weight; shock-capturing

收稿日期: 2022-02-18; 修订日期: 2022-03-19; 录用日期: 2022-03-20; 网络出版时间: 2022-04-20

基金项目: 国家自然科学基金(11972360, 11732016); 四川省科技计划项目(2018JZ0076); 国家数值风洞工程(NNW)

作者简介: 刘旭亮(1986-), 男, 助理研究员, 研究方向: 计算流体力学. E-mail: xliu@foxmail.com

引用格式: 刘旭亮, 武从海, 李虎, 等. WENO 格式的一种新型光滑因子及其应用[J]. 空气动力学学报, 2023, 41(5): 20-34.

LIU X L, WU C H, LI H, et al. A new type of smoothness indicator for weighted essentially non-oscillatory schemes and its application[J]. Acta Aerodynamica Sinica, 2023, 41(5): 20-34(in Chinese). doi: 10.7638/kqdlxxb-2022.0013

0 引言

双曲守恒方程是流体力学领域基本控制方程之一,在特定物理参数下,即使初始条件是光滑的,也可能出现激波和接触间断等不连续解,采用传统的线性格式进行数值求解会导致虚假振荡。准确模拟该类方程中的间断及精细结构需要开展非线性激波捕捉方法研究,为此,许多学者建立了一系列理论和方法。

为了消除间断处的数值振荡,Godunov^[1]在1959年首次提出迎风格式的思想,这是一个里程碑性的近似解方法。后来,Harten^[2-3]建立了总变差递减(total variation diminishing, TVD)格式。Godunov 格式仅有一阶精度,TV D 格式在数学上已经被证明至多能达到二阶精度^[4]。为了抑制数值解在激波上、下游的振荡,同时保证熵增条件,张涵信^[5]提出了一种无波动、无自由参数的耗散差分算法,即二阶精度的 NND 格式。由于 NND 格式具有 TVD 性质,物理概念明确且形式简洁,在工程领域得到了广泛的应用。随后,张涵信及其团队进一步发展了三阶精度的 ENN 格式^[6]。为了进一步提高精度,Harten 等^[7-9]通过放宽 TVD 条件,提出了有限体积框架的本质无振荡(essentially non-oscillatory, ENO)重构格式。ENO 格式采用 Newton 差商作为光滑因子,其基本思想是选择 Newton 差商较小的候选模板来进行重构,从而达到一致高阶精度,并且在间断和局部极值点附近具有本质无振荡的性质。之后,Shu 和 Osher^[10-11]将 ENO 格式推广到了有限差分框架。

ENO 格式在重构过程中计算了多个候选模板的光滑因子,但最后只选择了最光滑的一个模板进行重构。在间断区域,ENO 格式的思想是十分成功的;但是在光滑区域,从多个光滑候选模板中只选择最光滑的模板则未充分利用其余候选模板的信息。为了把多个光滑模板都利用起来并且提高格式精度,Liu 等^[12]在1994年基于 ENO 格式发展了有限体积框架的加权 ENO(weighted ENO, WENO)格式。WENO 格式把所有候选模板以凸组合的方式进行非线性加权,从而实现了一致高阶精度,并且保持了间断附近的本质无振荡性质。非线性权值分配的基本策略是在光滑区域恢复到最优精度的迎风格式,在间断模板分配较小的权值,实现本质无振荡的性质。由于 Liu 等^[12]的 WENO 格式采用 Newton 差商的平方和作为光滑因子,导致 WENO 格式在光滑区不能达到最优精度^[13],例如五点 WENO 格式在光滑区只能达到四阶精度。1996年,Jiang 和 Shu^[14]将 WENO 格式推广到了有限差分框架(简称为 WENO-JS 格式),这

项工作更重要的是通过所有候选模板的子重构多项式导数的归一化平方和(L_2 范数)构造了 Jiang-Shu 光滑因子。由于该光滑因子的良好特性,使得五点 WENO-JS 格式在光滑区能达到五阶最优精度。随后的研究者^[15-17]基于 Jiang-Shu 光滑因子得到了更高阶的 WENO-JS 格式,并将其应用到求解间断和复杂流动问题。

Henrick 等^[18]对五阶 WENO-JS 格式进行研究,结果表明当存在高阶临界点(critical points)时,五阶 WENO-JS 格式的收敛精度会降至三阶甚至更低。为了修正这一缺陷,Henrick 等^[18]巧妙设计了一个映射函数,对 WENO-JS 格式的非线性权进行映射,使得非线性权在光滑区尽可能接近线性权。该格式被称为映射 WENO(mapped WENO)格式,简称 WENO-M 格式。相比于 WENO-JS 格式,WENO-M 格式可以在光滑区域的临界点达到最优收敛精度,同时降低数值耗散。Borges 等^[19]通过对子模板上的 Jiang-Shu 光滑因子进行线性组合,提出了全局光滑因子,他们将全局光滑因子与局部光滑因子之比引入到非线性权的设计中,称为 WENO-Z 格式。五阶 WENO-Z 格式在一阶临界点处能达到最优收敛精度,并且由于 WENO-Z 格式不需要计算映射函数,使得 WENO-Z 格式计算效率高于 WENO-M 格式。随后,Castro 等^[20]发展了高阶 WENO-Z 格式,给出了所有奇数阶精度的全局光滑因子的公式。WENO-M 和 WENO-Z 格式在子模板上依然采用的是 Jiang-Shu 光滑因子,本质上都是导数项的 L_2 范数。如果基于 L_1 范数设计光滑因子,则可能会在光滑区域丢失精度^[21]。为了克服这个缺陷,Ha 等^[22]通过控制 Taylor 展开余项来构造 L_1 范数意义下的局部和全局光滑因子,然后采用 WENO-Z 型非线性权得到满足最优精度的 WENO 格式,简记为 WENO-NS 格式。Ha 等^[22]验证了存在一阶临界点时,五阶 WENO-NS 格式依然能达到最优精度。然而,WENO-NS 格式的光滑因子存在不对称性,并且全局光滑因子的计算量比较大,随后的研究工作^[23-25]针对这些问题进行了改进。WENO 格式计算量最大的部分在于光滑因子,为了降低计算成本,Baeza 等^[26]构造了一类高效计算的光滑因子,其形式比 Jiang-Shu 光滑因子更简洁,计算效率更高。基于该光滑因子,通过 WENO-Z 型非线性权得到了满足最优精度的快速 WENO(fast WENO)格式,简称为 WENO-F 格式。但是,七阶以上的 WENO-F 格式的计算稳定性略显不足^[27]。

传统的光滑因子在光滑区被设计成尽量接近零的小量,最近 Wu 等^[27-28]认识到如果减小光滑区中

候选模板的光滑因子之间的差异,不必满足光滑因子尽量接近零的条件,就能够减小 WENO 格式的非线性权和线性权之间的差异。为了实现这一目标, Wu 等^[27-28]构造了一类光滑因子,使得各个候选模板上的光滑因子对于正弦函数为同一常数。基于该光滑因子通过 WENO-Z 型非线性权得到了满足七阶直至十七阶精度的 WENO 格式^[27,28],简称为 WENO-S 格式。然而,由于算子函数定义的限制, WENO-S 格式至少为七阶,不能得到在实际应用中需求更广泛的五阶及以下的 WENO 格式。

对于 WENO 格式,构造新的光滑因子至少需要满足以下两点要求:1) WENO 格式在光滑区域满足精度条件^[18-19];2)在间断区保持本质无振荡的计算稳定性。

为了满足上述光滑因子的设计要求,本文基于 WENO-S 格式光滑因子对于特定函数为常数的准则,设计了一种适用于五阶 WENO 格式的新型光滑因子。数值实验表明新型 WENO 格式不仅能够准确地捕捉强激波,而且能够模拟剪切层和声波等精细流场结构。

1 控制方程与数值方法

1.1 控制方程

本文的数值方法主要应用于 Euler 方程和 Navier-Stokes 方程。以二维可压缩守恒变量形式的无量纲 Navier-Stokes 方程为例进行说明。

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial (\mathbf{F}_i - \mathbf{F}_v)}{\partial x} + \frac{\partial (\mathbf{G}_i - \mathbf{G}_v)}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

其中守恒变量为:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{bmatrix} \quad (2)$$

x, y 方向的通量分别为:

$$\mathbf{F}_i = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(E + p) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_v = \frac{1}{Re} \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + q_x \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\mathbf{G}_i = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(E + p) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_v = \frac{1}{Re} \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ v\tau_{yx} + u\tau_{yy} + q_y \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中总能为:

$$E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2) \quad (5)$$

粘性应力项为:

$$\begin{cases} \tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ \tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ \tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \tau_{yx} \end{cases} \quad (6)$$

传热项为:

$$\begin{cases} q_x = \frac{\mu}{(\gamma - 1)Ma^2 Pr} \frac{\partial T}{\partial x} \\ q_y = \frac{\mu}{(\gamma - 1)Ma^2 Pr} \frac{\partial T}{\partial y} \end{cases} \quad (7)$$

其中, Re 和 Ma 分别为参考雷诺数和参考马赫数, $Pr = 0.72$, 比热比 $\gamma = 1.4$, 黏性系数由 Sutherland 公式计算:

$$\mu = T^{\frac{3}{2}} \frac{1 + C}{T + C}, \quad C = \frac{110.4K}{T_{ref}} \quad (8)$$

其中 T_{ref} 为参考温度。

无量纲形式的完全气体状态方程和声速方程分别为:

$$p = \frac{\rho T}{\gamma Ma^2}, \quad a = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \quad (9)$$

1.2 数值方法

本文研究的数值格式主要用于离散 Euler 或者 Navier-Stokes 方程的对流项,下面以 x 方向的离散为例进行说明。

WENO 格式采用如下公式来离散导数项:

$$\mathbf{F}'_j = \frac{\hat{\mathbf{F}}_{j+\frac{1}{2}} - \hat{\mathbf{F}}_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta x} \quad (10)$$

其中 $\hat{\mathbf{F}}_{j+\frac{1}{2}}$ 通过 WENO 重构的方法来计算。对于系统方程,例如 Euler 或者 Navier-Stokes 方程,需要先把物理通量 $\mathbf{F}$ 投影到特征空间,然后对每一维的特征变量进行标量形式的 WENO 重构过程。计算出标量形式的数值通量之后,再通过逆特征投影得到物理空间中的数值通量 $\hat{\mathbf{F}}_{j+\frac{1}{2}}$ 。详细计算步骤可参考文献 [9,13]。

WENO 格式的本质是对标量形式的特征变量进行计算,因此下文重点以标量形式 $\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}$ 来说明五阶 WENO 格式的详细计算过程。

首先对通量 f 进行分裂 $f(u) = f^+(u) + f^-(u)$, 满足迎风性条件: $\frac{df^+(u)}{du} \geq 0, \frac{df^-(u)}{du} \leq 0$ 。常用的 Lax-Friedrichs 分裂为 $f^\pm(u) = \frac{1}{2}[f(u) \pm \alpha u]$, 其中 $\alpha = \max\{|f'(u)|\}$ 。

WENO 格式需要对 $\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^+$ 和 $\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^-$ 分别进行计算,然

后组合成数值通量 $\hat{f}_{j+\frac{1}{2}} = \hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^+ + \hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^-$ 。

因为负通量 $\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^-$ 的系数关于 $x_{j+\frac{1}{2}}$ 与 $\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^+$ 是对称的, 所以下文只需说明正通量 $\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^+$ 的构造过程。为了公式表达的简洁性, 行文中暂且忽略正通量指标的符号“+”。

1.2.1 线性子重构格式和线性权

数值通量 $\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}$ 在总模板 $S = \{x_{j-2}, \dots, x_{j+2}\}$ 上的线性重构为:

$$\begin{aligned} \hat{f}_{j+\frac{1}{2}} &= \sum_{r=0}^2 d_r \hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^{(r)} \\ &= \frac{1}{30} f_{j-2} - \frac{13}{60} f_{j-1} + \frac{47}{60} f_j + \frac{9}{20} f_{j+1} - \frac{1}{20} f_{j+2} \end{aligned} \quad (11)$$

在三个候选子模板 $S_0 = \{x_{j-2}, \dots, x_j\}$ 、 $S_1 = \{x_{j-1}, \dots, x_{j+1}\}$ 和 $S_2 = \{x_j, \dots, x_{j+2}\}$ 上的子重构分别为:

$$\begin{cases} \hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^{(0)} = \frac{1}{3} f_{j-2} - \frac{7}{6} f_{j-1} + \frac{11}{6} f_j \\ \hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^{(1)} = -\frac{1}{6} f_{j-1} + \frac{5}{6} f_j + \frac{1}{3} f_{j+1} \\ \hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^{(2)} = \frac{1}{3} f_j + \frac{5}{6} f_{j+1} - \frac{1}{6} f_{j+2} \end{cases} \quad (12)$$

从而可以计算出线性权值为: $d_0 = 1/10$, $d_1 = 6/10$, $d_2 = 3/10$ 。

本文中所有的五阶 WENO 格式的子重构和线性权取值都是一致的, 下文不再赘述。

1.2.2 WENO-JS 格式的光滑因子和非线性权

五阶 WENO-JS 格式^[14] 在三个候选子模板上的光滑因子为 $IS_r = \sum_{l=1}^2 \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \Delta x^{2l-1} \left(\frac{\partial^l p_r}{\partial x^l} \right) dx$, 具体为如下形式:

$$\begin{cases} IS_0 = \frac{13}{12} (f_{j-2} - 2f_{j-1} + f_j)^2 + \frac{1}{4} (f_{j-2} - 4f_{j-1} + 3f_j)^2 \\ IS_1 = \frac{13}{12} (f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1})^2 + \frac{1}{4} (f_{j-1} - f_{j+1})^2 \\ IS_2 = \frac{13}{12} (f_j - 2f_{j+1} + f_{j+2})^2 + \frac{1}{4} (3f_j - 4f_{j+1} + f_{j+2})^2 \end{cases} \quad (13)$$

对其 Taylor 展开, 可得:

$$\begin{cases} IS_0 = (f_j')^2 h^2 + \left[\frac{13}{12} (f_j'')^2 - \frac{2}{3} f_j' f_j^{(3)} \right] h^4 + O(h^5) \\ IS_1 = (f_j')^2 h^2 + \left[\frac{13}{12} (f_j'')^2 + \frac{1}{3} f_j' f_j^{(3)} \right] h^4 + O(h^6) \\ IS_2 = (f_j')^2 h^2 + \left[\frac{13}{12} (f_j'')^2 - \frac{2}{3} f_j' f_j^{(3)} \right] h^4 + O(h^5) \end{cases} \quad (14)$$

根据线性权和光滑因子可以计算出非线性权:

$$\alpha_r^{JS} = \frac{d_r}{(IS_r + \varepsilon)^2}, \quad r = 0, 1, 2 \quad (15)$$

其中, ε 用于防止分母为零, 一般取值为 $\varepsilon = 1 \times 10^{-6}$ 。归一化后的非线性权为:

$$\omega_r^{JS} = \frac{\alpha_r^{JS}}{\sum_{s=0}^2 \alpha_s^{JS}}, \quad r = 0, 1, 2 \quad (16)$$

根据式 (14) 可以得到: $IS_r = D[1 + O(\Delta x^2)]$, 其中 D 与 r 无关, 因此 WENO-JS 格式满足五阶精度^[14]。

根据非线性权和三个子重构式 (12) 可以得到五阶 WENO-JS 格式:

$$\hat{f}_{j+\frac{1}{2}} = \sum_{r=0}^2 \omega_r^{JS} \hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^{(r)} \quad (17)$$

1.2.3 WENO-Z 格式的光滑因子和非线性权

WENO-Z 格式^[19,20] 在三个候选子模板上的光滑因子与 WENO-JS 格式保持一致, 而 WENO-Z 格式的重要创新之处是引入了全局光滑因子 τ_s , 它表征了总模板的光滑性, 其中五阶全局光滑因子为 $\tau_s = |IS_0 - IS_2| = O(h^5)$ 。

WENO-Z 格式的非线性权取为如下形式:

$$\alpha_r^Z = d_r \left[1 + \left(\frac{\tau_s}{IS_r + \varepsilon} \right)^2 \right], \quad r = 0, 1, 2 \quad (18)$$

其中, ε 用于防止分母为零, 一般取值为 $\varepsilon = 1 \times 10^{-40}$ 。归一化后的非线性权为:

$$\omega_r^Z = \frac{\alpha_r^Z}{\sum_{s=0}^2 \alpha_s^Z}, \quad r = 0, 1, 2 \quad (19)$$

Borges 等^[19] 推导出 WENO-Z 型非线性权满足五阶精度的充分条件为:

$$\omega_r = d_r + O(h^3) \quad (20)$$

根据光滑因子和式 (18) 可得到: $\omega_r^Z = d_r + O(h^6)$, 因此满足五阶精度的充分条件式 (20)。

根据非线性权和三个子重构式 (12) 可以得到五阶 WENO-Z 格式:

$$\hat{f}_{j+\frac{1}{2}} = \sum_{r=0}^2 \omega_r^Z \hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^{(r)} \quad (21)$$

1.2.4 WENO-NS 格式的光滑因子和非线性权

五阶 WENO-NS 格式^[22] 在三个候选子模板上的

光滑因子取为如下形式:

$$\begin{cases} IS_0 = \xi |f_{j-2} - 3f_{j-1} + 2f_j| + |f_{j-2} - 2f_{j-1} + f_j| \\ IS_1 = \xi |-f_j + f_{j+1}| + |f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1}| \\ IS_2 = \xi |-f_j + f_{j+1}| + |f_j - 2f_{j+1} + f_{j+2}| \end{cases} \quad (22)$$

其中参数取为 $\xi = 0.4$ 。

五阶全局光滑因子为:

$$\tau_s = \frac{1}{2} \left\{ (IS_0 - IS_2)^2 + [G(f_{j+1} - f_j)]^2 \right\}, \quad G(x) = \frac{x^3}{1+x^3} \quad (23)$$

对其 Taylor 展开, 可得:

$$\begin{cases} IS_0 = \xi \left| f'_j h + \frac{1}{2} f''_j h^2 \right| + |f''_j h^2| + O(h^3) \\ IS_1 = \xi \left| f'_j h + \frac{1}{2} f''_j h^2 \right| + |f''_j h^2| + O(h^3) \\ IS_2 = \xi \left| f'_j h + \frac{1}{2} f''_j h^2 \right| + |f''_j h^2| + O(h^3) \\ \tau_s = O(h^6) \end{cases} \quad (24)$$

WENO-NS 格式的非线性权取为如下形式:

$$\alpha_r^{NS} = d_r \left[1 + \frac{\tau_s}{(IS_r + \varepsilon)^2} \right], \quad r = 0, 1, 2 \quad (25)$$

其中, ε 用于防止分母为零, 一般取值为 $\varepsilon = 1 \times 10^{-40}$ 。

归一化后的非线性权为:

$$\omega_r^{NS} = \frac{\alpha_r^{NS}}{\sum_{s=0}^2 \alpha_s^{NS}}, \quad r = 0, 1, 2 \quad (26)$$

根据式 (24) 可以得到: $\omega_r^{NS} = d_r + O(h^4)$, 因此满足五阶精度的充分条件式 (20)。

根据非线性权和三个子重构式 (12) 可以得到五阶 WENO-NS 格式:

$$\hat{f}_{j+\frac{1}{2}} = \sum_{r=0}^2 \omega_r^{NS} \hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^{(r)} \quad (27)$$

1.2.5 WENO-F 格式的光滑因子和非线性权

五阶 WENO-F 格式^[26] 在三个候选子模板上的光滑因子取为如下形式:

$$\begin{cases} IS_0 = (f_{j-2} - f_{j-1})^2 + (f_{j-1} - f_j)^2 \\ IS_1 = (f_{j-1} - f_j)^2 + (f_j - f_{j+1})^2 \\ IS_2 = (f_j - f_{j+1})^2 + (f_{j+1} - f_{j+2})^2 \end{cases} \quad (28)$$

五阶全局光滑因子为:

$$\tau_s = (f_{j+2} - 4f_{j+1} + 6f_j - 4f_{j-1} + f_{j-2})^2 \quad (29)$$

对其 Taylor 展开, 可得:

$$\begin{cases} IS_0 = 2(f'_j)^2 h^2 - 4(f'_j f''_j) h^3 + O(h^4) \\ IS_1 = 2(f'_j)^2 h^2 + \left[\frac{1}{2} (f''_j)^2 + \frac{2}{3} f'_j f''_j \right] h^4 + O(h^6) \\ IS_2 = 2(f'_j)^2 h^2 + 4(f'_j f''_j) h^3 + O(h^4) \\ \tau_s = O(h^8) \end{cases} \quad (30)$$

WENO-F 格式的非线性权取为如下形式:

$$\alpha_r^F = d_r \left(1 + \frac{\tau_s}{IS_r + \varepsilon} \right), \quad r = 0, 1, 2 \quad (31)$$

其中, ε 用于防止分母为零, 一般取值为 $\varepsilon = 1 \times 10^{-40}$ 。

归一化后的非线性权为:

$$\omega_r^F = \frac{\alpha_r^F}{\sum_{s=0}^2 \alpha_s^F}, \quad r = 0, 1, 2 \quad (32)$$

根据式 (30) 可以得到: $\omega_r^F = d_r + O(h^6)$, 因此满足五阶精度的充分条件式 (20)。

根据非线性权和三个子重构式 (12) 可以得到五阶 WENO-F 格式:

$$\hat{f}_{j+\frac{1}{2}} = \sum_{r=0}^2 \omega_r^F \hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^{(r)} \quad (33)$$

1.3 新型光滑因子和非线性权

Wu 等^[27,28] 针对描述波动属性的基本函数 $f(x) = \sin(x)$, 得到其导数关系: 对于 $r \geq 4$, $(f^{(r-2)})^2 - f^{(r-3)} f^{(r-1)} = 1$ 。由此发展了一类适用于多尺度流动问题的七阶及以上 WENO 格式的光滑因子。通过简单的导数运算, 可以发现当 $r = 3$ 时, $(f')^2 - f f'' = 1$ 也是成立的。本文以此为基础, 发展了五阶 WENO 格式的光滑因子。

首先将导数关系推广到更一般的正弦函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$, 经过简单的导数运算可以得到 $(f')^2 - f f'' = A^2 \omega^2$ 是常数。然后将导数关系推广到更一般的情形 $(f')^2 - \mu f f'' = C$, 其中 μ 和 C 为常数。求解该微分方程可以得到对应的函数形式。

以下举例说明。对于微分方程 $(f')^2 - f f'' = 1$, 还可以得到另一个特解为 $f(x) = \sinh(x)$ 。对于微分方程 $(f')^2 - 2f f'' = 0$, 可以得到一个特解为 $f(x) = x^2$ 。对于微分方程 $(f')^2 - \mu f f'' = C^2$, 其中 μ 和 C 为任意常数, 可以得到一个特解为 $f(x) = Cx$ 。对于微分方程 $(f')^2 - \mu f f'' = 0$, 其中 $\mu = 0.025$, 可以得到一个特解为 $f(x) = x^{-\frac{1}{39}}$ 。

因此, 当实际计算遇到的函数为这些特解时, 对于特定的参数 μ 和 C , 就能满足导数关系 $(f')^2 - \mu f f'' = C$ 。

定义如下的算子函数^[27,28]:

$$\begin{cases} \delta f(x) = f(x+h/2) - f(x-h/2) \\ \sigma f(x) = f(x+h/2) + f(x-h/2) \\ \sigma \delta f(x) = f(x+h) - f(x-h) \\ \delta^2 f(x) = f(x+h) - 2f(x) + f(x-h) \\ \sigma^2 f(x) = f(x+h) + 2f(x) + f(x-h) \end{cases} \quad (34)$$

其中 h 是网格宽度。

通过 Taylor 展开, 可得:

$$\begin{cases} \frac{1}{2h} \sigma \delta f(x) = f'(x) + O(h^2) \\ \frac{1}{h^2} \delta^2 f(x) = f''(x) + O(h^2) \\ \frac{1}{4} \sigma^2 f(x) = f(x) + O(h^2) \end{cases} \quad (35)$$

因此, 可以给出如下的算子函数关系:

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}(x) &= [\sigma \delta f(x)]^2 - \mu [\sigma^2 f(x)] [\delta^2 f(x)] \\ &= 4h^2 [(f')^2 - \mu f f''] + O(h^4) \end{aligned} \quad (36)$$

其中 μ 为参数。

当函数满足导数关系 $(f')^2 - \mu f f'' = C$, 在光滑区域 $\tilde{\beta}(x) = 4Ch^2 + O(h^4)$, 近似为与变量 x 无关的常数; 在间断区域 $(f')^2 - \mu f f'' = O(1/h^3)$, 则 $\tilde{\beta}(x) = O(1/h)$ 。

根据光滑因子设计的原理: 当模板位于光滑区域, 则光滑因子应该尽量接近零; 当模板位于间断区域, 则光滑因子应该尽量接近无穷大。因此 $\tilde{\beta}(x) = [\sigma \delta f(x)]^2 - \mu [\sigma^2 f(x)] [\delta^2 f(x)]$ 符合光滑因子的设计原理, 本文基于该函数来设计一类新型光滑因子。

在 $\tilde{\beta}(x)$ 中代入算子函数的表达式, 可得:

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}(x) &= [\sigma \delta f(x)]^2 - \mu [\sigma^2 f(x)] [\delta^2 f(x)] \\ &= [f(x+h) - f(x-h)]^2 - \\ &\quad \mu [f(x+h) + 2f(x) + f(x-h)] \cdot \\ &\quad [f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)] \\ &= (1-\mu) [f(x+h) - f(x-h)]^2 \\ &\quad + 4\mu [f(x)^2 - f(x+h)f(x-h)] \end{aligned} \quad (37)$$

由于光滑因子必须为正数才能保证计算的稳定性, 而上式并不能满足该要求。经过数值试验, 如果直接取上式的绝对值作为光滑因子会导致计算严重不稳定。借鉴 WENO-NS 和 WENO-S 格式的设计经

验, 我们取如下函数作为光滑因子:

$$\beta(x) = |1 - \mu| [f(x+h) - f(x-h)]^2 + 4|\mu| [f(x)^2 - f(x+h)f(x-h)] \quad (38)$$

在三个候选子模板 $S_0 = \{x_{j-2}, \dots, x_j\}$, $S_1 = \{x_{j-1}, \dots, x_{j+1}\}$ 和 $S_2 = \{x_j, \dots, x_{j+2}\}$ 上, 新型光滑因子分别取为如下形式:

$$\begin{cases} IS_0 = \beta(x_{j-1}) = |1 - \mu| (f_j - f_{j-2})^2 + 4|\mu| [f_{j-1}^2 - f_{j-2}f_j] \\ IS_1 = \beta(x_j) = |1 - \mu| (f_{j+1} - f_{j-1})^2 + 4|\mu| [f_j^2 - f_{j-1}f_{j+1}] \\ IS_2 = \beta(x_{j+1}) = |1 - \mu| (f_{j+2} - f_j)^2 + 4|\mu| [f_{j+1}^2 - f_jf_{j+2}] \end{cases} \quad (39)$$

其中, 参数 μ 越大则格式的数值耗散越大; 参数 μ 过小时则会由于耗散不足而导致计算激波出现不稳定。经过大量的数值试验, 本文中取 $\mu = 0.025$, 该参数能符合 WENO 格式对激波捕捉和模拟精细结构的需求。由这种新型光滑因子构造的 WENO 格式简记为 WENO-XS 格式。

类似于三点模板的光滑因子推导过程, 可以得到五点模板的新型五阶全局光滑因子:

$$\begin{aligned} \tau_s &= |1 - \mu| (f_{j+2} - 2f_{j+1} + 2f_{j-1} - f_{j-2})^2 + \\ &\quad 4|\mu| [(f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1})^2 - \\ &\quad (f_{j+2} - 2f_{j+1} + f_j)(f_j - 2f_{j-1} + f_{j-2})] \end{aligned} \quad (40)$$

WENO-XS 格式的非线性权取为如下形式:

$$\alpha_r^{\text{XS}} = d_r \left(1 + \frac{\tau_s}{IS_r + \varepsilon} \right), \quad r = 0, 1, 2 \quad (41)$$

其中, ε 用于防止分母为零, 本文取值为 $\varepsilon = 1 \times 10^{-40}$ 。归一化后的非线性权为:

$$\omega_r^{\text{XS}} = \frac{\alpha_r^{\text{XS}}}{\sum_{s=0}^2 \alpha_s^{\text{XS}}}, \quad r = 0, 1, 2 \quad (42)$$

根据非线性权和三个子重构式(12)可以得到新型五阶 WENO-XS 格式:

$$\hat{f}_{j+\frac{1}{2}} = \sum_{r=0}^2 \omega_r^{\text{XS}} \hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^{(r)} \quad (43)$$

2 精度分析和验证

2.1 新型光滑因子和非线性权的精度分析

对新型光滑因子式(39)进行 Taylor 展开, 可以得

到如下的精度估计:

$$\begin{cases} IS_0 = 4|1 - \mu|(f'_j)^2 h^2 + 4|\mu| \left| (f'_j)^2 - f_j f''_j \right| h^2 + O(h^3) \\ IS_1 = 4|1 - \mu|(f'_j)^2 h^2 + 4|\mu| \left| (f'_j)^2 - f_j f''_j \right| h^2 + O(h^4) \\ IS_2 = 4|1 - \mu|(f'_j)^2 h^2 + 4|\mu| \left| (f'_j)^2 - f_j f''_j \right| h^2 + O(h^3) \end{cases} \quad (44)$$

通过对比分析发现,如果忽略常数系数, WENO-JS、WENO-Z、WENO-NS 和 WENO-F 格式的光滑因子的 Taylor 展开主项都是 $(f'_j)^2 h^2$, 而新型光滑因子的 Taylor 展开主项为 $4|1 - \mu|(f'_j)^2 h^2 + 4|\mu| \left| (f'_j)^2 - f_j f''_j \right| h^2$, 可见新型光滑因子对候选模板的光滑性判断多出一项 $\left| (f'_j)^2 - f_j f''_j \right| h^2$ 。

为了分析新型光滑因子中各项的特性,以 $IS_1 = |1 - \mu|(f_{j+1} - f_{j-1})^2 + 4|\mu| |f_j^2 - f_{j-1} f_{j+1}|$ 为例进行说明。不妨简记为如下形式: $IS_1 = IS_1^{(1)} + IS_1^{(2)}$, 其中两个分量分别为: $IS_1^{(1)} = |1 - \mu|(f_{j+1} - f_{j-1})^2$, $IS_1^{(2)} = 4|\mu| |f_j^2 - f_{j-1} f_{j+1}|$ 。

以下从光滑函数问题和包含间断的问题两方面来分别说明:

1) 光滑函数问题。

取 $f(x) = \sin(\pi x)$, 其计算域为 $-1 \leq x \leq 1$, 计算网格取为 $N = 20$, 网格宽度为 $h = 0.1$ 。

图 1 给出了 WENO5-XS 格式光滑因子的两个分量在计算域内的分布,从图中可以发现 $IS_1^{(1)}$ 在光滑函数的极值附近迅速减小,在其余区域 $IS_1^{(1)}$ 的值则显著大于 $IS_1^{(2)}$ 。 $IS_1^{(2)}$ 分量基本保持常数,这是由于 $IS_1^{(2)} = 4|\mu| \left| (f'_j)^2 - f_j f''_j \right| h^2 + O(h^4)$, 对于函数 $f(x) =$

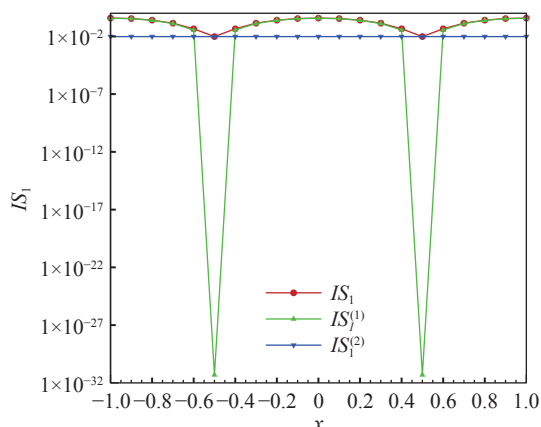


图 1 对光滑函数 WENO5-XS 格式光滑因子的两个分量

Fig. 1 Smoothness indicator and its components of WENO5-XS scheme in smooth region

$\sin(\pi x)$, 满足导数关系式 $\left| (f'_j)^2 - f_j f''_j \right|$ 为常数,使得 $IS_1^{(2)} = Ch^2 + O(h^4)$, 其中 C 为常数。采用 $IS_1^{(1)}$ 和 $IS_1^{(2)}$ 这两个分量作为光滑因子,分别计算得到的非线性权记为 $\omega_1^{(1)}$ 和 $\omega_1^{(2)}$, 其分布如图 2 所示。对于光滑函数,非线性权 $\omega_1^{(1)}$ 偏离线性权 ($d_1 = 0.6$) 严重,显然是不符合设计要求的。总的非线性权 ω_1 与线性权比较接近,是满足光滑问题的高精度计算需求的。

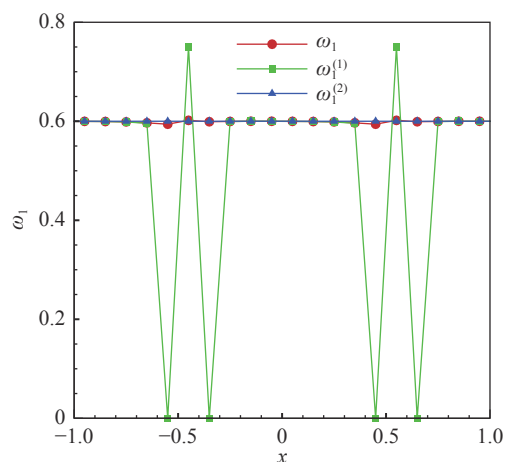


图 2 对光滑函数 WENO5-XS 格式光滑因子的两个分量计算的非线性权

Fig. 2 Nonlinear weights of WENO5-XS scheme in smooth region

不同五阶 WENO 格式的光滑因子和非线性权的比较如图 3、图 4 所示,可以发现 WENO5-JS 格式的非线性权 ω_1 与线性权 d_1 的偏离较大,其余格式非线性权与线性权的差异较小。

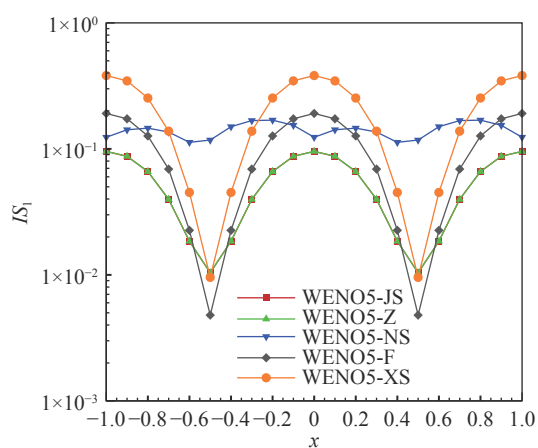


图 3 对光滑函数不同五阶 WENO 格式的光滑因子比较

Fig. 3 Smoothness indicators of different WENO5 schemes in smooth region

2) 包含间断的问题。

间断函数取为如下形式: 当 $-1 < x < 0$ 时, $f(x) = -\sin(\pi x) - x^3/2$; 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $f(x) = -\sin(\pi x) -$

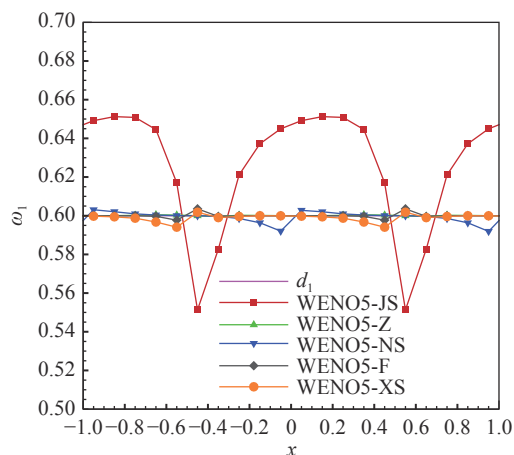


图 4 对光滑函数不同五阶 WENO 格式的非线性权比较

Fig. 4 Nonlinear weights of different WENO5 schemes in smooth region

$x^3/2+1$ 。计算网格取为 $N=200$, 网格宽度为 $h=0.01$ 。

图 5 给出了 WENO5-XS 格式光滑因子的两个分量在计算域内的分布, 从图中可以发现: 对于光滑区域, $IS_1^{(1)}$ 在函数极值附近迅速减小, 在其余光滑区域 $IS_1^{(1)}$ 的值则显著大于 $IS_1^{(2)}$ 。对于间断区域, $IS_1^{(1)}$ 和 $IS_1^{(2)}$ 都能准确地识别间断点, 并且 $IS_1^{(1)}$ 的值比 $IS_1^{(2)}$ 更大。采用 $IS_1^{(1)}$ 和 $IS_1^{(2)}$ 这两个分量作为光滑因子, 分别计算得到非线性权记为 $\omega_1^{(1)}$ 和 $\omega_1^{(2)}$, 其分布如图 6 所示。在间断处, 非线性权 $\omega_1^{(2)}$ 的数值比 $\omega_1^{(1)}$ 更小, 说明 $IS_1^{(2)}$ 对间断的识别起着重要作用, 因此光滑因子两个分量之和 IS_1 能更准确地识别间断。

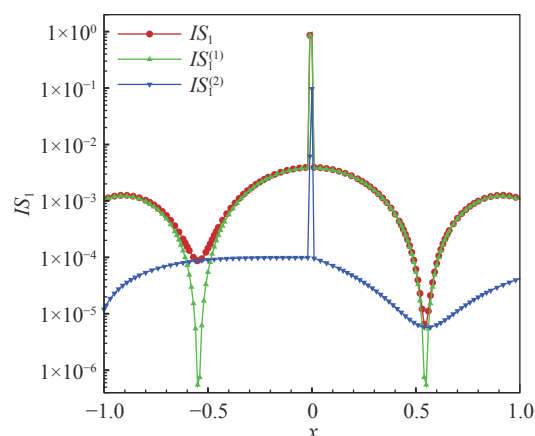


图 5 对间断函数 WENO5-XS 格式光滑因子的两个分量

Fig. 5 Smoothness indicator and its components of WENO5-XS scheme in discontinuous region

不同五阶 WENO 格式的光滑因子和非线性权的比较如图 7、图 8 所示, 可以发现间断点处 WENO5-JS 格式的非线性权值 ω_1 相对较小, 对间断的抹平最

严重; 在间断点处 WENO5-XS 格式的非线性权值 ω_1 相对较大, 对间断的分辨率更好。

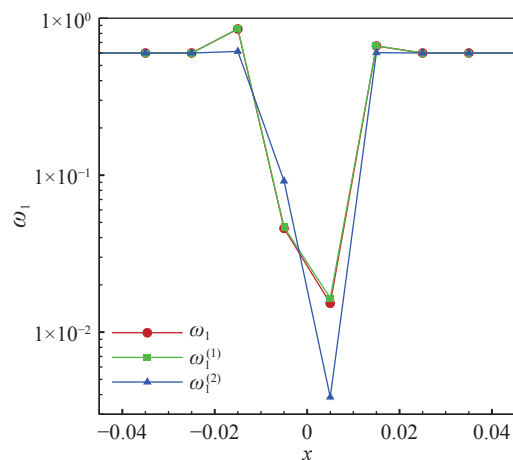


图 6 对间断函数 WENO5-XS 格式光滑因子的两个分量计算的非线性权

Fig. 6 Nonlinear weights of WENO5-XS scheme in discontinuous region

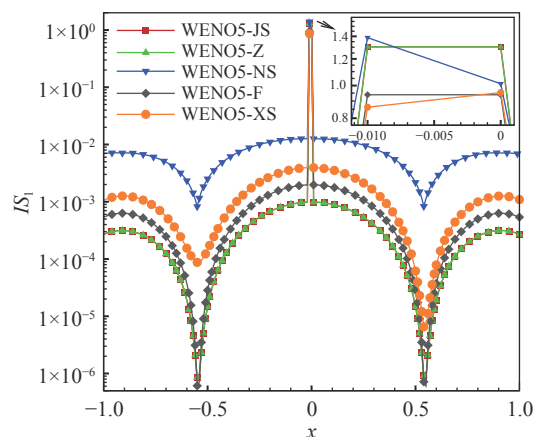


图 7 对间断函数不同五阶 WENO 格式的光滑因子比较

Fig. 7 Smoothness indicators of different WENO5 schemes in discontinuous region

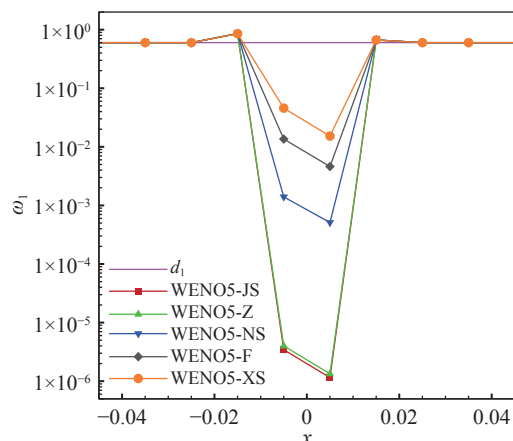


图 8 对间断函数不同五阶 WENO 格式的非线性权比较

Fig. 8 Nonlinear weights of different WENO5 schemes in discontinuous region

对新型五阶全局光滑因子进行 Taylor 展开, 可以得到:

$$\begin{aligned}\tau_s &= 4|1 - \mu|(f_j''')^2 h^6 + 4|\mu|[(f_j''')^2 - f_j'' f_j^{(4)}] h^6 + O(h^8) \\ &= O(h^6)\end{aligned}\quad (45)$$

把以上的精度估计代入非线性权, 可以得到如下关系:

$$\alpha_r^{\text{XS}} = d_r \left(1 + \frac{\tau_s}{IS_r + \varepsilon} \right) = d_r \left[1 + \frac{O(h^6)}{O(h^2)} \right] = d_r + O(h^4) \quad (46)$$

归一化后的非线性权为:

$$\begin{aligned}\omega_r^{\text{XS}} &= \frac{\alpha_r^{\text{XS}}}{\sum_{s=0}^2 \alpha_s^{\text{XS}}} = \frac{d_r + O(h^4)}{\sum_{s=0}^2 d_s + O(h^4)} \\ &= \frac{d_r + O(h^4)}{1 + O(h^4)} = d_r + O(h^4)\end{aligned}\quad (47)$$

当不存在临界点, 即当 $f_j' \neq 0$ 时, 式(47)满足五阶精度的充分条件式(20), 此时 WENO-XS 格式达到五阶最优精度要求。

当存在一阶临界点, 即当 $f_j' = 0$ 时,

$$\begin{cases} IS_0 = 4|\mu f_j f_j''| h^2 + O(h^3) \\ IS_1 = 4|\mu f_j f_j''| h^2 + O(h^4) \\ IS_2 = 4|\mu f_j f_j''| h^2 + O(h^3) \end{cases} \quad (48)$$

同样的推导方法可以得到: $\omega_r^{\text{XS}} = d_r + O(h^4)$, 因此仍然满足五阶精度的充分条件式(20)。

2.2 数值精度验证和计算效率

为了验证数值方法的精度, 我们选取如下的格式: 时间离散采用三阶 TVD Runge-Kutta 格式^[10], 通量分裂采用 Lax-Friedrichs 分裂, 空间离散采用五阶 WENO-XS 差格式。

以一维 Euler 方程的对流密度波问题为验证标准^[29], 其精确解为:

$$(\rho, u, p) = (1 + 0.1 \sin[\pi(x - t)], 1, 1) \quad (49)$$

计算域取为 $[0, 2]$, 边界取为周期性边界条件。计算的最终时刻取为 100 个周期 $t = 200$, 初始的计算网格为 80 个点, $CFL = 0.5$ 。随着网格点数增大, CFL 数取为 $CFL_2 = CFL_1(N_2/N_1)^{\frac{3-n}{3}}$, 其中下标“1”表示上一个时间层的值, 下标“2”表示下一个时间层的值, N 表示网格点数, $n = 5$ 表示空间离散精度。计算得到的数值结果如表 1 所示。该问题包含一阶临界点, 数

值结果验证了 WENO-XS 格式在一阶临界点处也达到了五阶的设计精度。

表 1 五阶 WENO-XS 格式的数值精度验证
Table 1 Numerical accuracy of WENO5-XS scheme

N	L_1 误差	L_1 阶数	L_∞ 误差	L_∞ 阶数
80	0.844×10^{-5}	--	0.133×10^{-4}	--
100	0.277×10^{-5}	5	0.435×10^{-5}	5
120	0.111×10^{-5}	5	0.175×10^{-5}	5
140	0.515×10^{-6}	5	0.809×10^{-6}	5
160	0.264×10^{-6}	5	0.415×10^{-6}	5

采用 CPU 计算时间和 L_1 平均误差作为综合因素来评价数值格式的计算效率。计算结果如图 9 所示, 可以发现计算效率从高到低依次是 WENO5-F、WENO5-XS、WENO5-Z、WENO5-NS 和 WENO5-JS 格式。其中 WENO5-F 格式的计算效率最高, 主要得益于 WENO5-F 的光滑因子的形式最简洁。WENO5-JS 格式计算效率最低, 主要是由于在相同网格下其计算误差较大。WENO5-XS 格式的计算效率比较高, 这是因为其光滑因子的形式比 WENO5-JS 和 WENO5-NS 的形式更简洁, 并且 WENO5-XS 格式的三个光滑因子在计算时只需平移一个坐标点, 此优点更利于编程和数值计算。

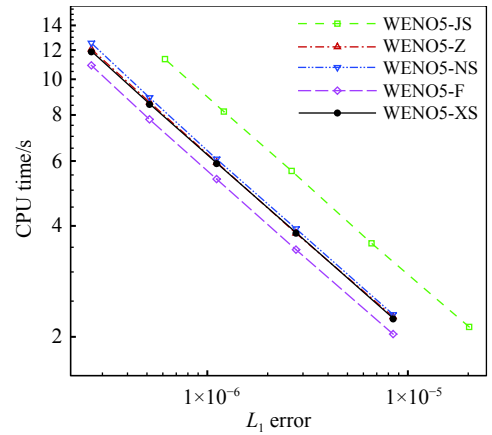


图 9 不同五阶 WENO 格式计算效率的比较

Fig. 9 The comparison of computational efficiency for different fifth-order WENO schemes

3 数值实验与分析

为了验证新型 WENO-XS 格式在双曲守恒方程中的计算准确度和稳定性, 本文计算了一维 Euler 方程、二维 Euler 方程和二维 Navier-Stokes 方程。时间离散采用三阶 TVD Runge-Kutta 格式^[10], 通量分裂采用 Lax-Friedrichs 分裂, 空间离散采用多种不同的五阶 WENO 格式用于比较计算结果。

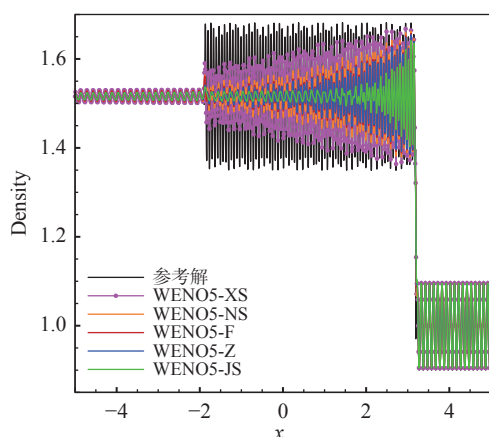
3.1 Titarev-Toro 问题

本问题的控制方程是一维 Euler 方程。Titarev-Toro 问题^[30]流场中含有丰富的密度波结构,能够考察计算格式对流场细节的分辨能力,是验证数值格式的标准算例。该问题的初始条件为:

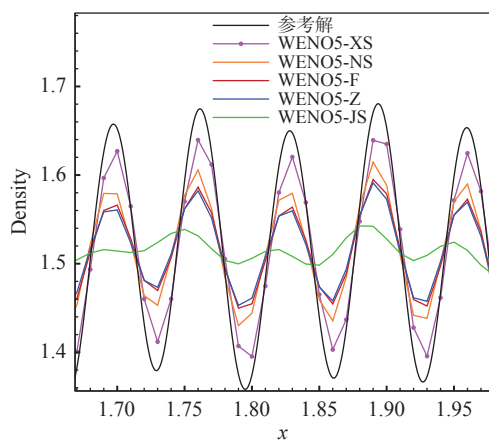
$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (1.515\ 695, 0.523\ 346, 1.805\ 000), & x \leq -4.5 \\ (1 + 0.1 \sin(20\pi x), 0.0, 1.0) & -4.5 < x \end{cases} \quad (50)$$

计算区域取为 $[-5, 5]$, 初始间断位于 $x = -4.5$ 处, 最终计算时刻取为 $t = 5$ 。边界处采用初始边界值。采用 10000 个网格点的五阶 WENO-JS 格式的计算结果来作为参考解。

本问题分别采用五阶 WENO-JS 格式、WENO-Z 格式、WENO-F 格式、WENO-NS 格式和新型 WENO-XS 格式来进行计算, 密度波的分布如图 10 所示。为了便于比较, 计算网格采用 1000 个点, 使得密度波的一个周期内有 10 个点。由于高频的密度波区域是光滑区域, 非常适合考察格式的短波分辨率和



(a) 不同五阶 WENO 格式的比较



(b) 局部放大

图 10 不同五阶 WENO 格式求解 Titarev-Toro 问题

Fig. 10 Solutions of the Titarev-Toro problem obtained by different fifth-order WENO schemes

耗散性。从计算结果可以看出, 新型 WENO-XS 格式在本问题中的计算结果与参考解最为接近, 这说明 WENO-XS 格式在光滑区的非线性权更接近线性权, 分辨率更高, 耗散更小。WENO-NS 格式的计算结果次之, WENO-F 格式比 WENO-Z 格式计算结果略好, 而 WENO-JS 格式在本问题中对高频密度波的分辨率结果相对较差。

3.2 双冲击波问题

本问题的控制方程是一维 Euler 方程。双冲击波问题^[31]包括了强激波、接触间断和膨胀波之间的相互作用, 对计算格式的稳定性要求比较高。其初值为:

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (1.0, 0.0, 1.000), & 0 \leq x < 0.1 \\ (1.0, 0.0, 0.01), & 0.1 \leq x < 0.9 \\ (1.0, 0.0, 100), & 0.9 \leq x \leq 1.0 \end{cases} \quad (51)$$

计算域两端采用反射边界条件, 计算终止时间为 $t = 0.038$, 采用 10000 个网格点的五阶 WENO-JS 格式的计算结果来作为该问题的参考解。

本问题分别采用五阶 WENO-JS 格式、WENO-Z 格式、WENO-F 格式、WENO-NS 格式和新型 WENO-XS 格式来进行计算, 密度的分布如图 11 所示。计算网格采用 250 个点。本问题中由双冲击波形成的间断区域非常适合考察格式的激波捕捉特性。从计算结果可以看出, 新型 WENO-XS 格式在本问题中的计算结果与参考解最为接近, 对间断的识别较为准确。WENO-F 格式比 WENO-NS 格式计算结果略好, WENO-Z 格式计算结果比 WENO-JS 格式好。

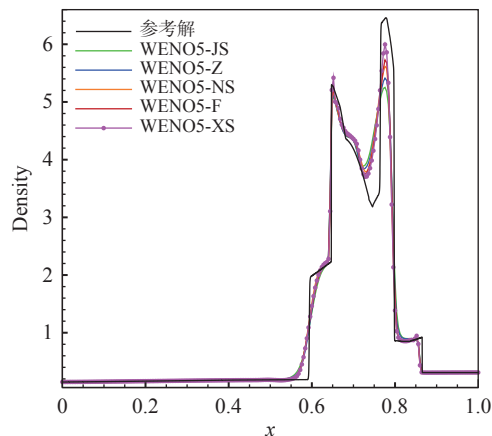
由于 WENO-Z 格式、WENO-F 格式、WENO-NS 格式和新型 WENO-XS 格式采用的都是 WENO-Z 类型的非线性权, 对于高频波的分辨率和激波捕捉优于传统的 WENO-JS 类型的非线性权。因此, 对于二维问题, 不再给出 WENO-JS 格式的计算结果。

3.3 激波双马赫反射问题

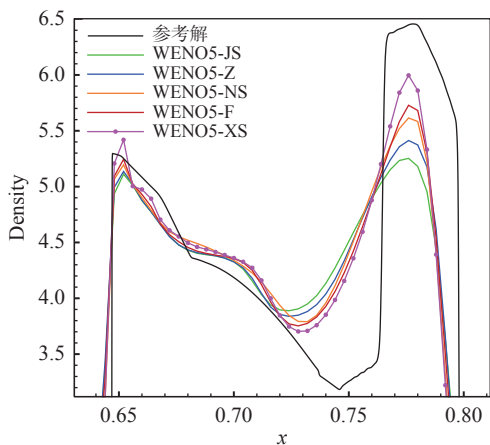
本问题的控制方程是二维 Euler 方程。双马赫反射问题^[31]包含强激波和滑移线, 非常适合于考察格式的激波捕捉能力和流场精细结构的分辨率。本问题描述的是马赫数为 10 的强运动斜激波以与 x 轴方向呈 60° 角的方向入射, 入射点在 $(1/6, 0)$, 计算区域取 $[0, 4] \times [0, 1]$ 。激波波前静止空气的密度为 1.4, 压力为 1, 波后按激波关系给定初始条件。初始物理参数为:

$$(\rho, u, v, p) = \begin{cases} (1.4, 0.0, 0.0, 1.0), & \text{波前} \\ (8.0, 7.145, -4.125, 116.5), & \text{波后} \end{cases} \quad (52)$$

下边界在 $[1/6, 4]$ 的区域给定壁面反射边界条件,



(a) 不同五阶WENO格式的比较



(b) 局部放大

图 11 不同五阶 WENO 格式求解双冲击波问题

Fig. 11 Solutions of two interacting blast waves obtained by different fifth-order WENO schemes

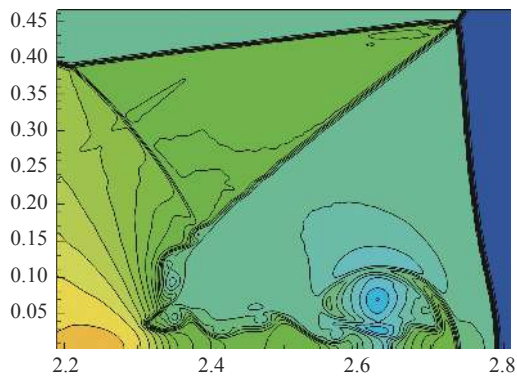
其它边界按照激波运动所在的位置分别给定波前或波后的值。本文采用 1500×375 的均匀网格计算到无量纲时间 $t = 0.2$ 。

本问题分别采用五阶 WENO-Z 格式、WENO-F 格式、WENO-NS 格式和新型 WENO-XS 格式来进行计算,结果如图 12 所示,取密度为 1.6~21 共 30 条等值线作图。本问题比较不同格式主要关注马赫杆和滑移线附近的分辨率,因此为了更好地比较不同的计算结果,在图中仅给出涡卷起区域 (blow-up region)。从计算结果可以看出,新型 WENO-XS 格式得到的旋涡结构是最丰富的,对流场精细结构的分辨率最高, WENO-NS 格式比 WENO-F 格式计算结果略好, WENO-Z 格式的计算结果相对较差。

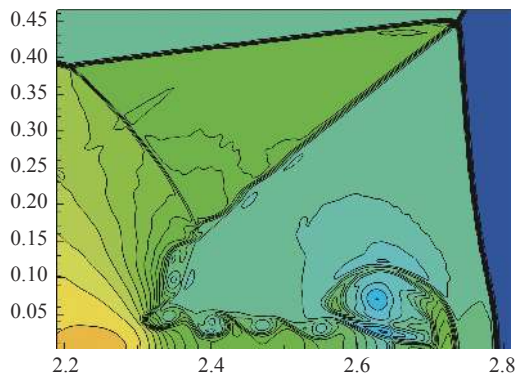
本问题的计算结果可以验证新型 WENO-XS 格式不仅能够模拟滑移线等精细结构,同时能够准确地捕捉激波。

3.4 前台阶问题

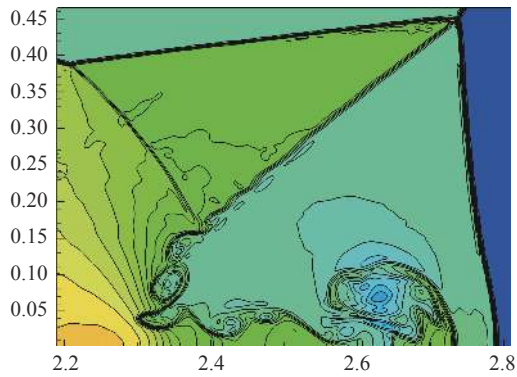
本问题的控制方程是二维 Euler 方程。前台阶问



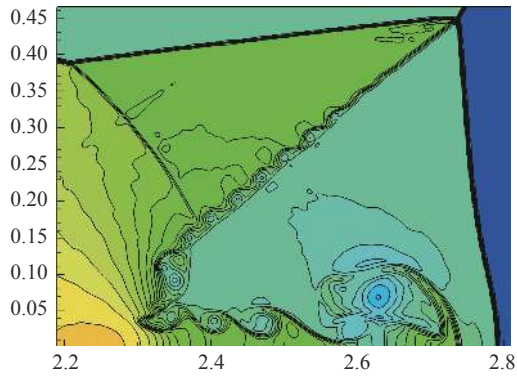
(a) WENO5-Z 计算结果



(b) WENO5-F 计算结果



(c) WENO5-NS 计算结果



(d) WENO5-XS 计算结果

图 12 不同五阶 WENO 格式求解双马赫反射问题

Fig. 12 Solutions of the double Mach reflection problem obtained by different fifth-order WENO schemes

题^[31]的初始条件为马赫数为 3 的强运动激波沿着带有台阶的风洞向右传播。台阶高度为 0.2, 前缘位置

在 0.6, 计算域为 $[0,3] \times [0,1]$ 。初始物理参数为:

$$(\rho,u,v,p)=(1.4,3.0,0.0,1.0)$$

(53)

左、右边界为开边界, 其余边界取壁面反射条件。本文采用 720×240 的均匀网格, 计算截止到无量纲时间 $t=4$ 的时刻。

本问题分别采用五阶 WENO-Z 格式、WENO-F 格式、WENO-NS 格式和新型 WENO-XS 格式来进行计算, 结果如图 13 所示, 取密度为 $0.2568 \sim 6.607$ 共 60 条等值线作图。本问题比较不同格式主要关注滑移线附近的分辨率。从计算结果可以看出, 新型 WENO-XS 格式识别的旋涡结构是最丰富的, 对流场精细结构的分辨率最高, WENO-NS 格式的计算结果次之, WENO-F 格式与 WENO-Z 格式的计算结果相当。

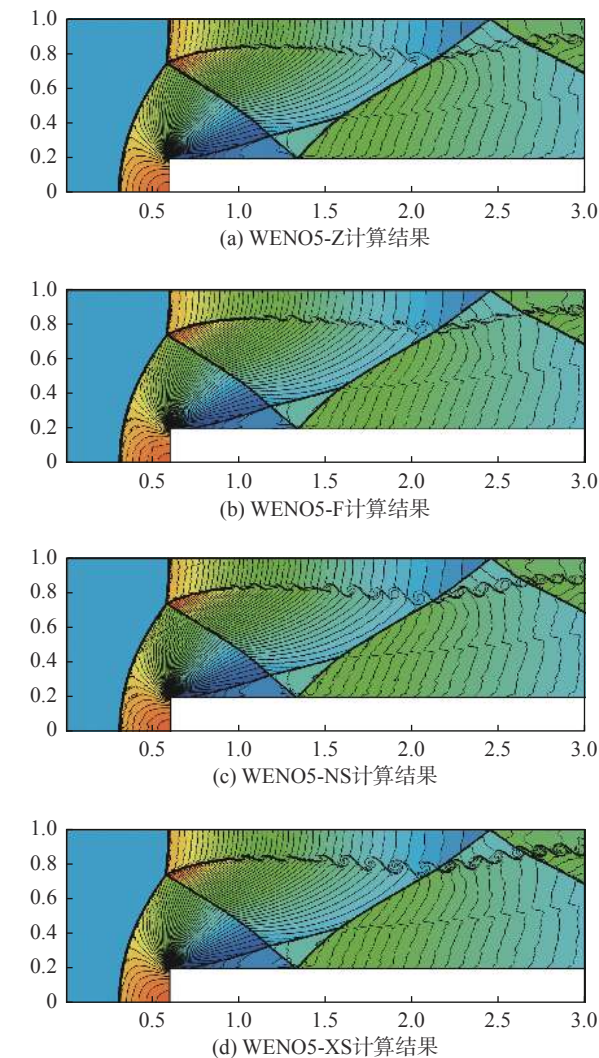


图 13 不同五阶 WENO 格式求解前台阶问题

Fig. 13 Flow fields around a forward facing step obtained by different fifth-order WENO schemes

本问题的计算结果可以验证新型 WENO-XS 格式能够准确地捕捉强激波, 同时能够分辨出滑移线附

近更多的旋涡精细结构, 说明 WENO-XS 格式的耗散是相对最小的。

3.5 激波与剪切层相互作用

本问题的控制方程是二维可压缩 Navier-Stokes 方程。本问题是典型的激波噪声问题, 在论文 [32, 33] 中有详细的描述和分析。以下简要说明计算的初始条件和边界条件。整个剪切层在初始时刻是等压的, 并且总的焓值也处处相等。计算域取为 $[0,200] \times [-20,20]$ 。初始时刻可以把计算域分成如图 14 所示的 5 个部分, 表 2 给出了各个区域具体的流动参数。

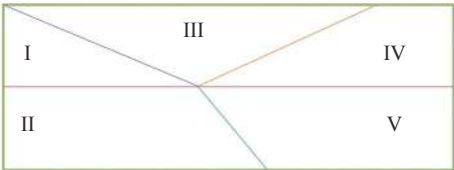


图 14 初始流场计算域的划分

Fig. 14 Decomposition of the computational domain at the initial state

表 2 初始时刻流场的物理参数

Table 2 Parameters of the initial flow field

Parameter	I	II	III	IV	V
u	3.0000	2.0000	2.9709	2.9792	1.9001
v	0	0	-0.1367	-0.1996	-0.1273
Density	1.6374	0.3626	2.1101	1.8823	0.4173
Pressure	0.3327	0.3327	0.4754	0.4051	0.4051
c	0.5333	1.1333	0.5616	0.5489	1.1658
Ma	5.6250	1.7647	5.2956	5.4396	1.6335

网格在 x 方向取均匀网格, 在 y 方向取拉伸网格, 拉伸变换关系为 $y = (L_y/2) \cdot [\sinh(b_y \eta) / \sinh(b_y)]$ 。 y 方向的计算域长度为 $L_y = 40$, 拉伸因子 $b_y = 1$, 计算网格 $\eta \in [-1, 1]$ 为均匀网格。

参考长度取为初始时刻涡量厚度, 参考密度取为 $\rho_{\text{ref}} = (\bar{\rho}_1 + \bar{\rho}_2)/2$, 参考速度取为 $V_{\text{ref}} = \bar{u}_1 - \bar{u}_2$, 参考 Reynolds 数 $Re = 500$ 。

上边界条件取激波波后的值, 即取 III 区的值。下边界条件取为滑移壁面边界条件。出口处用远场特征边界条件。

入口处取如下的边界条件: 平均流为双曲正切速度剖面 $\bar{u} = (u_1 + u_2)/2 + [(u_1 - u_2)/2] \cdot \tanh(2y)$, $\bar{v} = 0$; 对流速度为 $u_c = (u_1 c_2 + u_2 c_1)/(c_1 + c_2)$ 。入口扰动速度取为: $u' = 0, v' = \sum_{k=1}^2 a_k \cos(2\pi k t/T + \phi_k) \exp(-y^2/b)$ 。其中, $T = \lambda/u_c$, $\lambda = 30$, $b = 10$, $a_1 = a_2 = 0.05$, $\phi_1 = 0$, $\phi_2 = \pi/2$ 。

本问题采用 1000×200 的网格规模, 计算截止到

无量纲时间 $t = 120$ 的时刻。

采用 3800×900 网格点的五阶 WENO-JS 格式的计算结果作为该问题的参考解。本问题分别采用五阶 WENO-Z 格式、WENO-F 格式、WENO-NS 格式和新型 WENO-XS 格式来进行计算,结果如图 15 所示,取密度阴影 $\left(\Delta\rho = \frac{\partial^2\rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\rho}{\partial y^2}\right)$ 为 $-3.5 \sim 0.5$ 共 30 条等值线作图。本问题比较不同格式主要关注剪切层和声波的分辨率。新型 WENO-XS 格式对超声速剪切层外部的小激波结构识别相对较为清晰,对声波的分辨率相对较好。为了能够更清晰地显示不同格式之间的差别,取 $t = 120$ 时刻横向中心线位置 ($y = 0$) 的密度剖面进行比较 (图 16)。从密度剖面的计算结果可以看出,新型 WENO-XS 格式在本问题中的表现是最好的,其计算结果与参考解最为接近, WENO-NS 格式的计算结果比 WENO-F 格式略好, WENO-Z 格式的计算结果相对较差。

计算结果可以验证新型 WENO-XS 格式不仅能精细模拟剪切层和声波,同时能准确捕捉强激波。

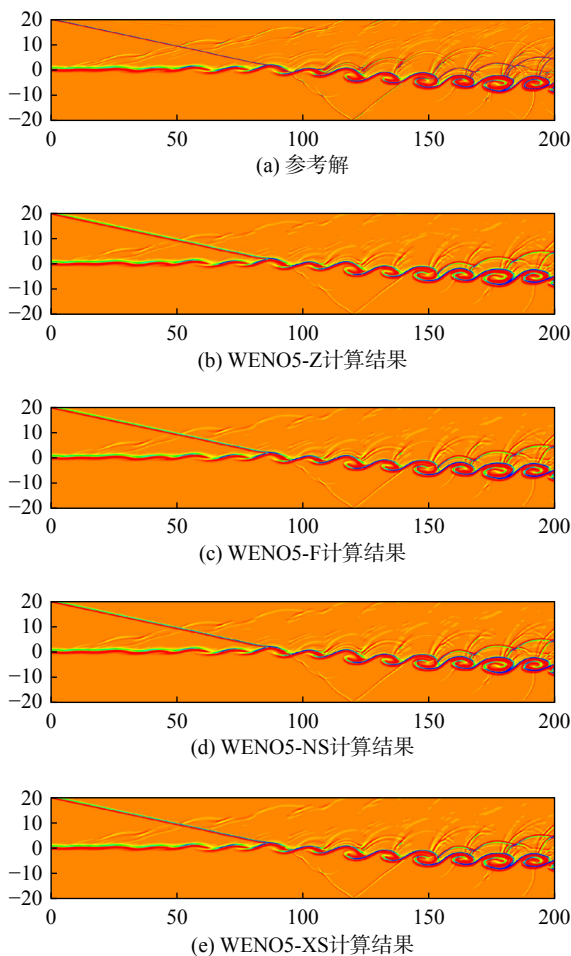
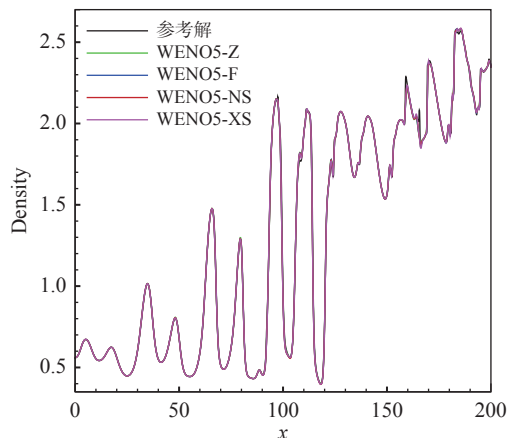
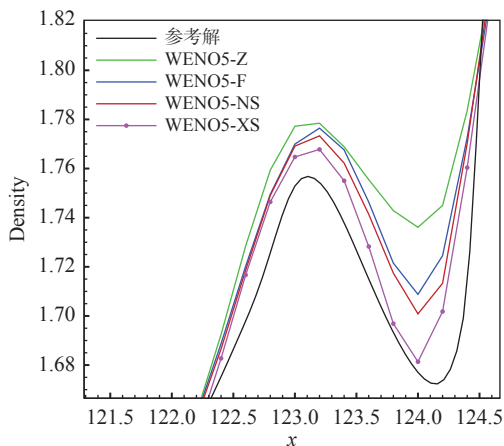


图 15 不同五阶 WENO 格式求解激波剪切层相互作用问题
Fig. 15 The interaction of shock wave and shear layer obtained by different fifth-order WENO schemes



(a) 不同五阶 WENO 格式的比较



(b) 局部放大

图 16 不同五阶 WENO 格式沿 $y = 0$ 的密度分布

Fig. 16 The distribution of density along $y = 0$ obtained by different fifth-order WENO schemes

4 结 论

本文针对广泛应用的五阶 WENO 格式,采用算子函数近似导数关系的方法,设计了一种新型光滑因子。在间断区域,与传统的光滑因子相比,新型光滑因子对模板的光滑性判断更好,对间断的识别更准确。在光滑区域,新型光滑因子使得新型 WENO 格式的非线性权更接近线性权。

理论分析和数值验证表明新型 WENO 格式具有五阶精度,即使在一阶临界点也能保持一致五阶精度。

对于一维激波管问题,通过与 WENO-JS、WENO-Z、WENO-F 和 WENO-NS 格式的比较,从计算结果可以发现新型 WENO-XS 格式与参考解最为接近,对短波的分辨率最高,格式的耗散性最小,同时对激波的间断识别最准确,具有良好的激波捕捉特性。

对于二维包含激波的流动问题,通过与其他 WENO 格式的比较,计算结果表明新型 WENO-XS 格式不仅能够准确地捕捉强激波,而且能够模拟剪切层

和声波等精细流场结构,得到的旋涡结构是最丰富的,对旋涡和声波的分辨率最高。

本文提出的五阶 WENO-XS 格式在求解包含激波的复杂流动问题中具有潜在的应用价值。提出的新型光滑因子构造思路不局限于五阶,可以推广到更高阶的 WENO 格式,相关的工作还需进一步研究探索。

参 考 文 献:

- [1] GODUNOV S K. A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics[J]. *Mathematicheskii Sbornik*, 1959, 47(3): 271–306.
- [2] HARTEN A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws[J]. *Journal of Computational Physics*, 1983, 49(3): 357–393. doi: 10.1016/0021-9991(83)90136-5
- [3] HARTEN A. On a class of high resolution total-variation-stable finite-difference schemes[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1984, 21(1): 1–23. doi: 10.1137/0721001
- [4] OSHER S, CHAKRAVARTHY S. High resolution schemes and the entropy condition[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1984, 21(5): 955–984. doi: 10.1137/0721060
- [5] 张涵信. 无波动、无自由参数的耗散差分格式[J]. *空气动力学学报*, 1988, 6(2): 143–165.
ZHANG H X. Non-oscillatory and non-free-parameter dissipation difference scheme[J]. *Acta Aerodynamica Sinica*, 1988, 6(2): 143–165 (in Chinese).
- [6] 张涵信, 贺国宏, 张雷. 高精度差分求解气动方程的几个问题[J]. *空气动力学学报*, 1993(4): 347–356.
ZHANG H X, HE G H, ZHANG L. Some important problems for high order accurate difference scheme solving gas dynamic equations[J]. *Acta Aerodynamica Sinica*, 1993(4): 347–356 (in Chinese).
- [7] HARTEN A, OSHER S, ENGQUIST B, et al. Some results on uniformly high-order accurate essentially nonoscillatory schemes[J]. *Applied Numerical Mathematics*, 1986, 2(3-5): 347–377. doi: 10.1016/0168-9274(86)90039-5
- [8] HARTEN A, OSHER S. Uniformly high-order accurate nonoscillatory schemes. I[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1987, 24(2): 279–309. doi: 10.1137/0724022
- [9] HARTEN A, ENGQUIST B, OSHER S, et al. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes, III[J]. *Journal of Computational Physics*, 1987, 71(2): 231–303. doi: 10.1016/0021-9991(87)90031-3
- [10] SHU C W, OSHER S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes[J]. *Journal of Computational Physics*, 1988, 77(2): 439–471. doi: 10.1016/0021-9991(88)90177-5
- [11] SHU C W, OSHER S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes, II[J]. *Journal of Computational Physics*, 1989, 83(1): 32–78. doi: 10.1016/0021-9991(89)90222-2
- [12] LIU X D, OSHER S, CHAN T. Weighted essentially non-oscillatory schemes[J]. *Journal of Computational Physics*, 1994, 115(1): 200–212. doi: 10.1006/jcph.1994.1187
- [13] SHU C W. Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws[J]. *Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations*, 1998(1697): 325–432. doi: 10.1007/BFb0096355
- [14] JIANG G S, SHU C W. Efficient implementation of weighted ENO schemes[J]. *Journal of Computational Physics*, 1996, 126(1): 202–228. doi: 10.1006/jcph.1996.0130
- [15] BALSARA D S, SHU C W. Monotonicity preserving weighted essentially non-oscillatory schemes with increasingly high order of accuracy[J]. *Journal of Computational Physics*, 2000, 160(2): 405–452. doi: 10.1006/jcph.2000.6443
- [16] SHI J, ZHANG Y T, SHU C W. Resolution of high order WENO schemes for complicated flow structures[J]. *Journal of Computational Physics*, 2003, 186(2): 690–696. doi: 10.1016/S0021-9991(03)00094-9
- [17] GEROLYMOS G A, SÉNÉCHAL D, VALLET I. Very-high-order weno schemes[J]. *Journal of Computational Physics*, 2009, 228(23): 8481–8524. doi: 10.1016/j.jcp.2009.07.039
- [18] HENRICK A K, ASLAM T D, POWERS J M. Mapped weighted essentially non-oscillatory schemes: achieving optimal order near critical points[J]. *Journal of Computational Physics*, 2005, 207(2): 542–567. doi: 10.1016/j.jcp.2005.01.023
- [19] BORGES R, CARMONA M, COSTA B, et al. An improved weighted essentially non-oscillatory scheme for hyperbolic conservation laws[J]. *Journal of Computational Physics*, 2008, 227(6): 3191–3211. doi: 10.1016/j.jcp.2007.11.038
- [20] CASTRO M, COSTA B, DON W S. High order weighted essentially non-oscillatory WENO-Z schemes for hyperbolic conservation laws[J]. *Journal of Computational Physics*, 2011, 230(5): 1766–1792. doi: 10.1016/j.jcp.2010.11.028
- [21] SERNA S, MARQUINA A. Power ENO methods: a fifth-order accurate weighted power ENO method[J]. *Journal of Computational Physics*, 2004, 194(2): 632–658. doi: 10.1016/j.jcp.2003.09.017
- [22] HA Y, HO KIM C, JU LEE Y, et al. An improved weighted essentially non-oscillatory scheme with a new smoothness indicator[J]. *Journal of Computational Physics*, 2013, 232(1): 68–86. doi: 10.1016/j.jcp.2012.06.016
- [23] KIM C H, HA Y, YOON J. Modified non-linear weights for fifth-order weighted essentially non-oscillatory schemes[J]. *Journal of Scientific Computing*, 2016, 67(1): 299–323. doi: 10.1007/s10915-015-0079-3
- [24] RATHAN S, G N R. An improved non-linear weights for seventh-order weighted essentially non-oscillatory scheme[J]. *Computers & Fluids*, 2017, 156: 496–514. doi: 10.1016/j.compfluid.2017.08.023
- [25] RATHAN S, RAJU G N. A modified fifth-order WENO scheme for hyperbolic conservation laws[J]. *Computers & Mathematics With Applications*, 2018, 75(5): 1531–1549. doi: 10.1016/j.camwa.2017.11.020
- [26] BAEZA A, BÜRGER R, MULET P, et al. On the efficient computation of smoothness indicators for a class of WENO reconstructions[J]. *Journal of Scientific Computing*, 2019, 80(2): 1240–1263. doi: 10.1007/s10915-019-00974-7
- [27] WU C H, WU L, LI H, et al. Very high order WENO schemes using efficient smoothness indicators[J]. *Journal of Computational Physics*, 2021, 432: 110158. doi: 10.1016/j.jcp.2021.110158
- [28] WU C H, WU L, ZHANG S H. A smoothness indicator constant for sine functions[J]. *Journal of Computational Physics*, 2020, 419: 109661.

- doi: [10.1016/j.jcp.2020.109661](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2020.109661)
- [29] LIU X L, ZHANG S H, ZHANG H X. Development of high-order weighted compact schemes with various difference methods[J]. *Computers & Fluids*, 2016, 136: 114–131.
doi: [10.1016/j.compfluid.2016.06.003](https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2016.06.003)
- [30] TITAREV V A, TORO E F. Finite-volume WENO schemes for three-dimensional conservation laws[J]. *Journal of Computational Physics*, 2004, 201 (1): 238–260.
doi: [10.1016/j.jcp.2004.05.015](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2004.05.015)
- [31] WOODWARD P, COLELLA P. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks[J]. *Journal of Computational Physics*, 1984, 54 (1): 115–173.
doi: [10.1016/0021-9991\(84\)90142-6](https://doi.org/10.1016/0021-9991(84)90142-6)
- [32] YEE H C, SANDHAM N D, DJOMEHRI M J. Low-dissipative high-order shock-capturing methods using characteristic-based filters[J]. *Journal of Computational Physics*, 1999, 150 (1): 199–238.
doi: [10.1006/jcph.1998.6177](https://doi.org/10.1006/jcph.1998.6177)
- [33] 刘旭亮, 张树海. 二维激波与剪切层相互作用的直接数值模拟研究[J]. *力学学报*, 2013, 45 (1): 61–75.
LIU X L, ZHANG S H. Direct numerical simulation of the interaction of 2d shock wave and shear layer[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2013, 45 (1): 61–75 (in Chinese).

(本文责编: 周奇杰)