

# 基于自适应重启的配电网全纯嵌入三相潮流算法

张逸<sup>1</sup>, 蔡伟杰<sup>1</sup>, 李传栋<sup>2\*</sup>, 蓝天<sup>1</sup>, 林志宇<sup>1</sup>

- (1. 福州大学电气工程与自动化学院, 福建省 福州市 350108;
2. 福建农林大学机电工程学院, 福建省 福州市 350100)

## A Three-phase Holomorphic Embedding Power Flow Algorithm for the Distribution Network Based on Adaptive Restart

ZHANG Yi<sup>1</sup>, CAI Weijie<sup>1</sup>, LI Chuandong<sup>2\*</sup>, LAN Tian<sup>1</sup>, LIN Zhiyu<sup>1</sup>

- (1. College of Electrical Engineering and Automation, Fuzhou University, Fuzhou 350108, Fujian Province, China; 2. College of Mechanical and Electrical Engineering, Fujian Agriculture and Forestry University, Fuzhou 350100, Fujian Province, China)

**ABSTRACT:** Aiming at the convergence problem of Newton-Raphson (NR) method and holomorphic embedding load-flow method (HELM) in the case of large system and heavy load, in this paper, an adaptive restart three-phase load flow method based on holomorphic embedding (ARHELM) is proposed. First, the classical three-phase HELM is used as the initial model of power flow calculation. The no-load state which is easy to obtain is taken as its germ. Then, the flexible three-phase HELM power flow algorithm model is derived and used as the power flow calculation update model after the classical HELM restart, which can arbitrarily select the germ to restart the power flow calculation. Next, aiming at the problem of slow convergence and non-convergence in the process of power flow solution, different adaptive restart mechanisms are proposed to improve the calculation efficiency and ensure the reliability of the results. Finally, the proposed algorithm is compared with the NR method, classical HELM, and the fast and flexible holomorphic embedding power flow method (FFHELM) using the IEEE 33-bus, modified IEEE 123-bus, and Case 1152 systems. The good convergence performance of the proposed algorithm in large power grid, heavy load and ill-conditioned system is verified.

**KEY WORDS:** holomorphic embedding load-flow method; three-phase power flow; adaptive restart; distribution network

**摘要:** 针对牛顿-拉夫逊(Newton Raphson, NR)法和全纯嵌入潮流算法(holomorphic embedding load-flow method, HELM)在大系统、重负载情况下存在的收敛性问题, 提出一种基于自适应重启的配电网全纯嵌入三相潮流算法

(adaptive restart three-phase load flow method based on holomorphic embedding, ARHELM)。首先, 以经典三相 HELM 作为潮流计算初始模型, 将易于获取的空载状态作为其“芽解”; 其次, 推导灵活三相 HELM 潮流算法模型, 并作为经典 HELM 重启后的潮流计算模型, 其可任意选取“芽解”进行潮流计算; 再次, 针对潮流求解过程中出现的收敛缓慢和不收敛问题, 提出不同的自适应重启机制, 提高计算效率, 保障结果可靠性; 最后, 在 IEEE 33、改造 IEEE 123 以及 Case 1152 系统上, 将所提算法与 NR 法、经典 HELM、快速灵活的全纯嵌入算法(fast and flexible holomorphic embedding power flow method, FFHELM)进行对比分析, 验证所提算法在大规模、重负载配电网中具有的良好收敛性能。

**关键词:** 全纯嵌入潮流算法; 三相潮流; 自适应重启; 配电网

## 0 引言

近年来, 随着新能源发电技术趋于成熟, 大量分布式电源、电动汽车充电桩等单相大功率新能源设备接入配电网, 导致中低压配电网的三相不平衡问题将愈发突出<sup>[1-2]</sup>。潮流计算作为电力系统分析和规划最为基础的部分<sup>[3]</sup>, 为满足未来中低压配电网的分析需求, 精细化的三相潮流计算将逐渐替代当前广泛采用的单相潮流计算<sup>[4]</sup>, 具有重要的研究意义。

目前, 现有文献中的三相潮流算法大多是基于单相基础潮流算法直接进行三相扩展得到的, 都存在基础算法固有的不足之处<sup>[5]</sup>。如三相系统中常用的 2 类潮流算法: 牛顿-拉夫逊(Newton Raphson, NR)法<sup>[6]</sup>和前推回代法<sup>[7]</sup>。牛拉法在大多配电网计算场景下具有良好的收敛特性, 然而, 面对大规模、重负载系统网络时, 其固有的初值依赖问题, 会导

基金项目: 福建省自然科学基金项目(2020J01123)。

Project Supported by the Natural Science Foundation of Fujian Province (2020J01123).

致算法无法收敛或收敛至低电压解<sup>[8-9]</sup>；前推回代法，在处理分布式电源大量接入或弱环网场景时，算法的复杂程度上升、收敛性能变差，在新型电力系统中的适应性不强<sup>[10-11]</sup>。

西班牙学者 Antonio Trias 于 2012 年首次提出了一种非初值依赖、收敛性好新型递归潮流算法——全纯嵌入潮流算法(holomorphic embedding load-flow method, HELM)<sup>[12]</sup>，以解决基于数值迭代的传统潮流算法存在的初值选取敏感和迭代过程中的收敛性的问题<sup>[13-14]</sup>。理论上，当系统存在解时，全纯嵌入潮流算法能够保证潮流收敛结果的唯一性和可靠性；当系统不存在解时，则给予明确的大幅振荡信号<sup>[15]</sup>。由于 HELM 具有的良好收敛性能，因此受到了国内外学者们的广泛关注，并为其拓展和应用做了大量研究。目前，HELM 被陆续应用在交流系统<sup>[16]</sup>、直流系统<sup>[17]</sup>、配电系统<sup>[18]</sup>和交直流混合系统<sup>[19]</sup>中，均具有较好的应用成果。在三相系统中，基于 HELM，文献[20]提出一种适用于含分布式电源和多种负载类型的三相配电网潮流算法；文献[21]提出一种三相潮流通用算法，实现了不同接地方式下的三相潮流计算。然而，已有研究表明，在大规模、重负载的配电三相系统中，HELM 容易受到截断误差带来的数值问题，导致潮流结果收敛困难<sup>[22]</sup>。从数学角度分析，Padé 近似函数存在的大量零极点对会累积在函数的收敛域边界，当这些零极点对形成的分支切割线阻碍了潮流算法的解析延拓路径，将影响潮流收敛<sup>[23-24]</sup>，这种现象将在存在三相不平衡的大规模、重负载三相配电系统中更为严重。

为进一步探讨提高 HELM 收敛性能的潜力，文献[25]提出一种快速灵活的全纯嵌入算法(fast and flexible holomorphic embedding power flow method, FFHEM)，可任意选取潮流计算的“芽解”，而非特定的运行状态(如零电流注入和平坦启动)，其目的在于改变“芽解”与目标解之间的距离，以达到降低递归求解阶数、提高潮流收敛性能的效果。然而，FFHEM 的缺点在于摒弃了经典 HELM 的非初值依赖优势，无法保证所选取的“芽解”能快速可靠收敛至高电压解。尽管如此，FFHEM 通过改变“芽解”状态来提高算法收敛性能的初步构想，为后续基于 HELM 的改进提供了新思路。文献[8]提出一种基于常项值动态更新和先验节点的策略，避免了高阶幂级数的 Padé 近似计算，提高了潮流计算效率。文献[26]提出一种具有重启机制的全纯嵌入

潮流算法(restarted holomorphic embedding load-flow model, RHELM)，RHELM 在固定的递归阶数后进行潮流重启，利用低阶幂级数的 Padé 近似解来不断更新“芽解”，以达到解决大规模、重负载系统中 HELM 的收敛性问题。然而，无论是常项值动态更新机制还是 RHELM 的重启动方式都是需要进行事先设定，缺乏一定的灵活性和普适性。并且算法模型均是基于单相系统构建的，在三相系统中并未进行充足的讨论分析，无法保证算法大规模、重负载配电三相系统中的收敛性和普遍适应性。

针对上述问题，本文提出基于自适应重启的配电网全纯嵌入三相潮流算法(adaptive restart three-phase load flow method based on holomorphic embedding, ARHELM)。首先，将经典三相 HELM 作为所提方法的初始启动模型，该模型可以以稳定可靠的“芽解”(空载状态)进行启动，确保初始状态具有物理意义；其次，结合电网三相元件模型，推导灵活型 HELM 的三相模型，并将其作为重启后的潮流计算模型，该模型的优势在于能够以任意“芽解”进行潮流计算，是结合重启机制进行潮流求解的基础；再次，基于潮流缓慢收敛甚至陷入停滞解和潮流发散 2 种现象，提出不同的自适应重启策略，在递归求解过程中合理地重启并更新 ARHELM 的“芽解”状态，提高算法的求解效率，保障收敛结果的可靠性；最后，在 IEEE 33、改造 IEEE 123 及 Case 1152 系统上，将 NR 法、经典三相 HELM、FFHELM 和本文算法进行对比，验证了本文方法在大规模、重负载配电网三相系统中具有更好的收敛性能。

## 1 配电网三相导纳模型

本节以配电网两节点单相模型为基础，分别从线路导纳、对地导纳和变压器漏磁导纳 3 个部分，介绍了本文如何从单相到三相、从两节点到整个系统的三相导纳矩阵  $\mathbf{Y}$  的构建方法，以便于第 2 节 ARHELM 模型的构建。

### 1.1 配电网线路模型

图 1、2 分别为配电网某线路  $ik$  的单相和三相  $\pi$  形等效电路。本文的三相线路模型是在图 1 单相模型的基础上简易扩展至三相获得的。

### 1.2 三相导纳矩阵构造

为获取整个系统的三相导纳矩阵，首先，构建图 2 中线路  $ik$  的线路导纳矩阵  $\mathbf{Y}_{L,ik}$  和节点对地导纳

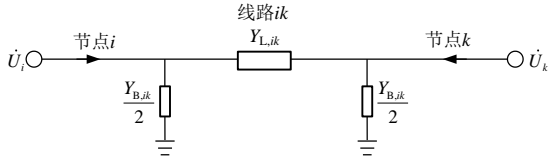


图1 配电网单相线路模型

Fig. 1 Single-phase line model of distribution network

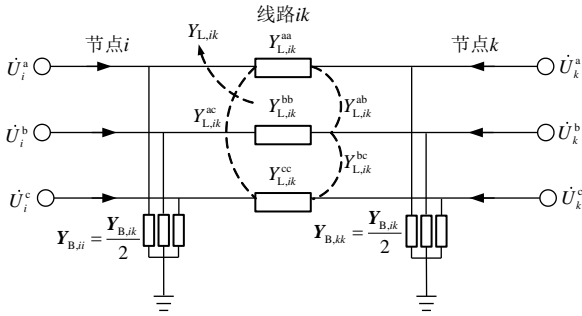


图2 配电网三相线路模型

Fig. 2 Three-phase line model of distribution network

矩阵  $Y_{B,ik}$  以  $Y_{L,ik}$  为例, 具体形式如下:

$$Y_{L,ik} = \begin{bmatrix} Y_{L,ik}^{aa} & Y_{L,ik}^{ab} & Y_{L,ik}^{ac} \\ Y_{L,ik}^{ba} & Y_{L,ik}^{bb} & Y_{L,ik}^{bc} \\ Y_{L,ik}^{ca} & Y_{L,ik}^{cb} & Y_{L,ik}^{cc} \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中  $Y_{L,ik}^{mn}$  ( $m, n=a, b, c$ ) 为端点  $i$  和  $k$  间线路的互导纳 ( $m \neq n$  时) 和自导纳 ( $m=n$  时), 考虑了线路自阻抗和线间互感作用。

其次, 根据不同接法变压器的对称序分量回路, 构建变压器三相漏磁导纳矩阵  $Y_{T,ik}$ <sup>[27]</sup>。本文之所以采用该变压器模型, 是考虑到基于我国当前实际电网数据基础, 更容易从序网得到变压器元件各序参数。并且, 该变压器模型能够很好地解决中性点接地、不接地的系统、消弧线圈补偿以及相移问题, 在工程意义上具有更好普适性。变压器接线方式以 YNyn12 为例, 矩阵  $Y_{T,ik}$  具体如下:

$$Y_{T,ik} = \begin{bmatrix} \frac{y_{T0} + 2y_{T1}}{3} & \frac{y_{T0} - y_{T1}}{3} & \frac{y_{T0} - y_{T1}}{3} \\ \frac{y_{T0} - y_{T1}}{3} & \frac{y_{T0} + 2y_{T1}}{3} & \frac{y_{T0} - y_{T1}}{3} \\ \frac{y_{T0} - y_{T1}}{3} & \frac{y_{T0} - y_{T1}}{3} & \frac{y_{T0} + 2y_{T1}}{3} \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中  $y_{T1}$ 、 $y_{T2}$  和  $y_{T0}$  分别为节点  $i$ 、 $k$  之间变压器的各序分量。

最后, 计算出三相系统中每条线路  $ik$  的  $Y_{L,ik}$ 、 $Y_{B,ik}$  和  $Y_{T,ik}$  矩阵, 通过相加得到各线路的节点三相导纳矩阵:

$$Y_{ik} = Y_{L,ik} + Y_{T,ik} + Y_{B,ik} \quad (3)$$

按照各线路的对应关系, 构建系统三相导纳矩阵  $Y$ , 矩阵  $Y$  的  $(i, k)$  元素为分块矩阵  $Y_{ik}$ :

$$Y = \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & Y_{ik} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (4)$$

## 2 ARHELM 模型及递归求解

### 2.1 模型构建思路

全纯函数的一个重要性质: 全纯函数  $x(\alpha)$  可以在集合  $D$  上关于复变量  $\alpha$  进行复系数幂级数展开如下<sup>[28]</sup>:

$$x(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] \alpha^n, \quad \alpha \in D \quad (5)$$

利用全纯嵌入法求解潮流方程的数学本质在于, 设计出合理的全纯嵌入形式, 将全纯因子  $\alpha$  嵌入到待求变量  $x$  (一般为系统节点电压和无功) 和方程式中。此时,  $x$  的数值求解问题便可转化为解析函数  $x(\alpha)$  的 Taylor 展开式求解问题, 最终得到  $\alpha$  从 0~1 延拓路径上的  $x(\alpha)$  解析解。

HELM 的构造形式是多样的, 目前主要可以分为经典型<sup>[12]</sup>、灵活型<sup>[25]</sup>和古典型<sup>[29]</sup>3 种。本文算法主要应用经典和灵活 2 种全纯嵌入形式, 其主要优缺点为: 1) 经典型, 将具有物理意义的空载状态作为“芽解”, 以高电压解分支起点开始, 理论上通过解析延拓过程可靠收敛于目标状态, 避免了牛顿类潮流算法存在的初值选取依赖问题。但在大规模、重负载系统中, 由于存在的某些数值问题, 会导致经典型的收敛性变差<sup>[22]</sup>; 2) 灵活型, 能够实现以任意状态作为“芽解” (并非某些特定点, 例如空载状态) 启动潮流计算。虽然这种灵活性和灵活的嵌入式系统可以任意选取“芽解”, 但“芽解”的好坏将影响着算法的收敛性和收敛速率<sup>[30]</sup>。一方面, 合理的“芽解”能够进一步提高算法的收敛性和计算效率; 相反, 不合理的“芽解”则会导致算法无法收敛或是收敛至低电压解 (例如“芽解”一开始就处于低电压解分支上)。

基于以上分析, 本文的 ARHELM 模型最初利用经典 HELM 的具有确定初始解、能够可靠收敛于高电压解的优势, 将其作为本文算法的初始潮流计算模型。同时, 考虑通过潮流计算重启的方式, 根据潮流计算的收敛情况选择合适的潮流重启的时机, 通过不断更新“芽解”, 保证函数的解析延拓

能快速可靠的逼近目标状态, 来避免经典 HELM 在大规模、重负载需要的高阶幂级数计算。而灵活 HELM 以其可以灵活配置其初始解, 并且如果初始解合理能够提升计算效率的优势<sup>[22]</sup>, 又为重启后的潮流计算模型提供了思路。

## 2.2 ARHELM 模型

ARHELM 初始启动模型为经典三相 HELM, 其构造方式见附录 A。本节为灵活型 HELM 从单相模型扩展到三相模型的推导过程。

灵活型全纯嵌入单相潮流模型为

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^N Y_{ik} U_k(s) = \frac{\bar{S}_{i0} + s\bar{S}_{id}}{\bar{U}_i(\bar{s})}, \forall i \in E_{PQ} \\ \sum_{k=1}^N Y_{ik} U_k(s) = \frac{P_i + sP_{id} - jQ_i(s)}{\bar{U}_i(\bar{s})}, \forall i \in E_{PV} \\ U_i(s)\bar{U}_i(\bar{s}) = U_{i0}\bar{U}_{i0} + s(|U_i^{sp}|^2 - U_{i0}\bar{U}_{i0}) \\ U_i(s) = U_{i0} + s(U_i^{sp} - U_{i0}), \forall i \in E_{slack} \\ \begin{cases} S_{id} = S_i - S_{i0}, \forall i \in E_{PQ} \\ P_{id} = P_i - P_{i0}, \forall i \in E_{PV} \end{cases} \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} S_{id} = S_i - S_{i0}, \forall i \in E_{PQ} \\ P_{id} = P_i - P_{i0}, \forall i \in E_{PV} \end{cases} \quad (7)$$

式中: 上标“-”表示共轭;  $E_{slack}$ 、 $E_{PQ}$  和  $E_{PV}$  分别为平衡、PQ 和 PV 节点的集合;  $s$  为全纯嵌入因子;  $Y_{ik}$  为节点  $i$  与  $k$  之间的互导纳;  $U_{i0}$  为节点  $i$  的电压初值;  $U_i^{sp}$  为 PV 或平衡节点目标状态电压;  $S_i$  为 PQ 节点  $i$  的复功率;  $S_{i0}$  为节点  $i$  的初始状态功率;  $S_{id}$  为节点  $i$  的  $d$  方向修正功率, 表示 HELM 的解析延拓方向;  $P_i$  为节点  $i$  的有功功率;  $P_{i0}$  为节点  $i$  的初始状态有功功率;  $P_{id}$  为节点  $i$  的  $d$  方向修正有功功率;  $Q_i$  为节点  $i$  的无功功率。

将所有节点电压从单相复量扩展为三相复量, 以  $U_i$  为例, 用列向量矩阵表示, 各功率的扩展方式同上。由此, 式(6)的单相潮流模型可以进一步地扩展为三相潮流模型:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^N Y_{ik} U_k(s) = s\bar{W}_i(\bar{s}) \odot \bar{S}_{id} + \bar{W}_i(\bar{s}) \odot \bar{S}_{i0}, \forall i \in I_{PQ} \\ \sum_{k=1}^N Y_{ik} U_k(s) = s\bar{W}_i(\bar{s}) \odot \bar{P}_{id} + \bar{W}_i(\bar{s}) \odot \bar{P}_{i0} - j\bar{W}_i(\bar{s}) \odot \bar{Q}_i(s), \forall i \in I_{PV} \\ U_i(s) \odot \bar{U}_i(\bar{s}) = s(U_i^{sp} \odot U_i^{sp} - U_{i0} \odot \bar{U}_{i0}) + U_{i0} \odot \bar{U}_{i0} \\ U_i(s) = U_{i0} + s(U_i^{sp} - U_{i0}), \forall i \in I_{slack} \end{cases} \quad (8)$$

式中:  $\odot$  为 Hadamard 积, 表示相同维度矩阵对应元素相乘; 列向量  $W_i$  中各元素是对于列向量  $U_i$  中

各元素的倒数, 形式为

$$W_i = \frac{1}{U_i} = \left[ \frac{1}{U_i^a}, \frac{1}{U_i^b}, \frac{1}{U_i^c} \right] \quad (9)$$

需要说明, 由于中性点不接地的中压配电网不存在零序通路, 当系统存在三相不平衡问题时, 将导致中性点电压漂浮, 影响潮流收敛<sup>[17]</sup>。因此, 在计算三相不平衡配电网潮流时, 需要考虑零序电流约束, 并对不接地节点的潮流方程进行松弛替换(具体见附录 B)。

零序电流约束为

$$\sum_{k=1}^N Y_{ik}^{sum} U_k(s)_{3 \times 1} = 0, i \in E_{ungrounded} \quad (10)$$

式中:  $Y_{ik}^{sum}$  为对式(3)中矩阵  $Y_{ik}$  每一列的所有元素进行列求和, 矩阵维度为  $1 \times 3$ ;  $E_{ungrounded}$  为不接地节点的集合。

## 2.3 ARHELM 重启判据

重启机制的关键在于重启时机以及保障重启前在  $s=1$  处的截断解是具有物理意义的高电压解。前者能够提高算法计算效率, 后者可以保障本文 2 种全纯模型混合求解的模式能够可靠收敛至高电压解。因此, 本文提出以下重启判据:

1) 判据 1 为

$$\begin{cases} \Delta S_1 - \Delta S_2 \geq \omega_n (\Delta S_{n-1} - \Delta S_n) \geq 0 \\ \Delta S_{n-1} \geq \omega_n (\Delta S_{n-1} - \Delta S_n) \end{cases}, \quad n \geq 2 \quad (11)$$

式中:  $\Delta S_n$  为递归求解至第  $n$  阶时在  $s=1$  处得的截断解与目标解之间功率或电压幅值的最大不平衡量(若考虑中性点不接地时,  $\Delta S_n$  还表示最大电流不平衡量);  $\omega_n$  为自适应步频, 其数值随着递归阶数增多而变小, 用以对递归过程中的最大残差变化情况进行动态响应, 具体形式为

$$\omega_n = \begin{cases} k - (n - 2), & n \leq k + 2 \\ 0, & n > k + 2 \end{cases} \quad (12)$$

式中  $k$  为在不同系统潮流计算中, 进行 1 次 LU 矩阵分解与进行 1 次矩阵回代所需时间的比值, 本文利用  $k$  来量化进行一次潮流重启和一次递归求解所需的时间成本对应关系。

2) 判据 2 为

$$\begin{cases} \Delta S_{n-1} - \Delta S_n < 0 \\ -90^\circ < \max[f_{\text{angle}}(U_{i-a}) - f_{\text{angle}}(U_{SL-a}^{sp})] < 90^\circ \end{cases} \quad (13)$$

式中:  $U_{i-a}$  为各节点 A 相电压组成的列向量;  $U_{SL-a}^{sp}$  为对应节点个数的平衡节点的 A 相电压组成的列

向量;  $f_{\text{angle}}(\cdot)$ 为获取向量相角的函数。

潮流计算过程中,最大残差 $\Delta S$ 随着递归阶数增加不断减小,并且若潮流收敛,残差变化总体趋势为逐阶递减。此外,第1阶到第2阶的最大残差变化 $\Delta S_1-\Delta S_2$ 往往比后续最大残差变化大得多,为方便理解,给出图3所示的最大残差变化示意图。

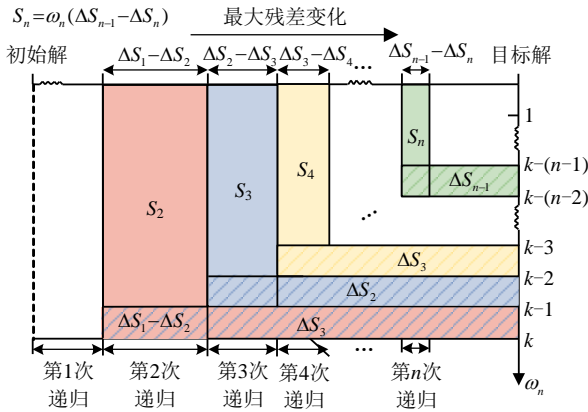


图3 最大残差变化示意图

Fig. 3 Maximum residual change diagram

在判据1中,结合图3分析,本文利用自适应步频与第 $n-1$ 阶到第 $n$ 阶残差变化 $\Delta S_{n-1}-\Delta S_n$ 的乘积,来近似模拟解析函数在第 $n-1$ 阶上继续递归求解次后的 $\Delta S$ 的最大变化情况,在图3中用不同色块区域 $S_n$ 表示。当解析函数求解至第 $n$ 阶时,首先比较1、2阶的最大残差变化是否大于 $(\Delta S_n-\Delta S_{n-1})$ (在图3中分别用深红阴影色块 $\Delta S_1-\Delta S_2$ 和纯绿色块 $S_n$ 表示);若不满足,说明此时的收敛速度较快,没有进行重启的必要;若满足,说明继续进行次递归求解的计算效益可能不如进行一次潮流重启,存在进行潮流重启的要素1。此时,再将 $(\Delta S_n-\Delta S_{n-1})$ 与实际 $\Delta S_{n-1}$ 大小进行比较(在图3中分别用纯绿色块 $S_n$ 和绿色阴影色块 $\Delta S_{n-1}$ 表示);若前者大,说明在第 $n-1$ 阶上继续进行次递归,存在几阶后收敛的可能,不需要进行重启;反之,则说明当前的潮流状态与目标状态还有一定的距离,需要进行潮流重启,利用1、2阶较大的残差变化步长优势来提高收敛速度,存在进行潮流重启的要素2。当同时满足要素1和2,则通过判据1进行潮流重启。

判据1的前式是为了解决HELM在大规模、重负载系统中需要进行高阶幂级数计算,导致计算时间成本增加的问题;后式是为了避免在小规模、轻负载系统中,过于频繁地进行潮流重启使得计算时间成本增加,或是由于数值精度问题导致潮流结果出现停滞收敛现象。

判据2中,  $\max(\cdot)$ 表示获取向量中的最大值函数,相角约束上下限值设为 $\pm 90^\circ$ ,该值为多次实验后评估的最佳数值结果,本文目前无法从理论方面论证(部分节点电压经变压器发生相角偏移,可将偏移量叠加至约束上下限进行相应约束调整)。

判据2的重启动机制,主要是针对潮流收敛过程中出现潮流解波动振荡或发散的现象。本文发现,在潮流求解过程中当出现波动振荡或发散时,会出现无物理意义且相角非常大的截断解,若将该截断解作为下一次重启的“芽解”,会导致潮流的解析延拓路径由高电压解分支转移到低电压解分支,进而影响收敛结果。因此,当满足式(13)中的前式时,说明此时出现潮流发散情况,而进行潮流重启之前,需要进一步判断此时所有的节点截断电压解与设定的平衡节点A相相角的偏差,当最大的相角偏差的绝对值大于 $90^\circ$ 时,认为此时的截断电压解是低电压解;而相角偏差满足(13)后式时,说明获得的截断解属于高电压解,此时可以进行潮流重启。通过对相角的约束,可以极大程度地保障传递给灵活HELM模型的“芽解”是物理上有意义的解,从而保障潮流收敛结果的可靠性。

### 2.4 ARHELM模型求解

本节主要推导了本文算法重启后模型的各节点类型对应的递归求解方程以及“芽解”传递形式。

下文推导ARHELM重启后的灵活型三相潮流模型的递归求解过程。初始潮流计算模型的递归求解公式推导详见文献[21]。

将式(8)模型中的全纯函数进行泰勒幂级数展开,并使用实、虚部来表示各复量。根据方程式两侧幂级数系数相等原则,可以推导出各节点类型对应模型的递归计算矩阵方程(详见附录C):

1) 平衡节点。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{abc}^{\text{Re}} & -\mathbf{M}_{abc}^{\text{Im}} \\ \mathbf{M}_{abc}^{\text{Im}} & \mathbf{M}_{abc}^{\text{Re}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_i^{\text{Re}}[n] \\ \mathbf{U}_i^{\text{Im}}[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Re}(\delta_{n0}\mathbf{U}_{i0} + \delta_{n1}(\mathbf{U}_i^{\text{SP}} - \mathbf{U}_{i0})) \\ \text{Im}(\delta_{n0}\mathbf{U}_{i0} + \delta_{n1}(\mathbf{U}_i^{\text{SP}} - \mathbf{U}_{i0})) \end{bmatrix} \quad (14)$$

式中:  $\delta_{ni}$ 为脉冲函数,当 $n=i$ 时,脉冲系数为1,反之则为0;  $\mathbf{U}_i[n]$ 为全纯函数 $\mathbf{U}_i(s)$ 的 $n$ 阶系数;相角变化矩阵 $\mathbf{M}_{abc}$ 见式(C1)。

2) PQ节点。

$$\sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \text{Re}(\mathbf{Y}_{ik}\mathbf{M}_{abc}) & -\text{Im}(\mathbf{Y}_{ik}\mathbf{M}_{abc}) \\ \text{Im}(\mathbf{Y}_{ik}\mathbf{M}_{abc}) & \text{Re}(\mathbf{Y}_{ik}\mathbf{M}_{abc}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_k^{\text{Re}}[n] \\ \mathbf{U}_k^{\text{Im}}[n] \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \text{Re}(\mathbf{K}[n-1]) \\ \text{Im}(\mathbf{K}[n-1]) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{diag}(\mathbf{M}^{\text{Re}}[0]) & \text{diag}(\mathbf{M}^{\text{Im}}[0]) \\ \text{diag}(\mathbf{M}^{\text{Im}}[0]) & -\text{diag}(\mathbf{M}^{\text{Re}}[0]) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_i^{\text{Re}}[n] \\ \mathbf{U}_i^{\text{Im}}[n] \end{bmatrix} \quad (15)$$

式中： $\text{diag}(\mathbf{A})$ 表示若有某列向量 $\mathbf{A}$ ，则为将该列向量重构为对角矩阵，将 $\mathbf{A}$ 的各元素按照顺序依次填入对角矩阵；辅助变量矩阵 $\mathbf{K}[n-1]$ 和 $\mathbf{M}[0]$ 分别构建为

$$\begin{cases} \mathbf{K}[n-1] = \mathbf{M}_{\text{abc}} \bar{\mathbf{W}}_i[n-1] \odot \bar{\mathbf{S}}_{id} - \\ \mathbf{M}_{\text{abc}} \left( \frac{1}{\bar{\mathbf{U}}_i[0]} \right) \odot \left( \sum_{k=1}^{n-1} \bar{\mathbf{W}}_i[k] \odot \bar{\mathbf{U}}_i[n-k] \right) \odot \bar{\mathbf{S}}_{i0} \\ \mathbf{M}[0] = \mathbf{M}_{\text{abc}} \bar{\mathbf{W}}_i[0] \odot \bar{\mathbf{W}}_i[0] \odot \bar{\mathbf{S}}_{i0} \end{cases} \quad (16)$$

式中： $\mathbf{W}_i[n]$ 为全纯函数 $\mathbf{W}_i(s)$ 的第 $n$ 阶幂级数系数； $\mathbf{W}_i(s)$ 为 $\mathbf{U}_i(s)$ 的倒数形式，形式同式(9)，幂级数展开形式为

$$\mathbf{W}_i(s) = \frac{1}{\mathbf{U}_i(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{W}_i[n] s^n \quad (17)$$

3) PV 节点。

$$\mathbf{U}_i^{\text{Re}}[n] = \mathbf{G}[n-1] - \mathbf{U}_i^{\text{Im}}[0] \odot \mathbf{U}_i^{\text{Im}}[n] \odot \left( \frac{1}{\mathbf{U}_i^{\text{Re}}[0]} \right) \quad (18)$$

$$\sum_{k=1}^N \left( \begin{bmatrix} \text{Re}(\mathbf{Y}_{ik} \mathbf{M}_{\text{abc}}) & -\text{Im}(\mathbf{Y}_{ik} \mathbf{M}_{\text{abc}}) \\ \text{Im}(\mathbf{Y}_{ik} \mathbf{M}_{\text{abc}}) & \text{Re}(\mathbf{Y}_{ik} \mathbf{M}_{\text{abc}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_k^{\text{Re}}[n] \\ \mathbf{U}_k^{\text{Im}}[n] \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \text{Re}[\mathbf{L}[n-1]] \\ \text{Im}[\mathbf{L}[n-1]] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{diag}(\text{Im}(\mathbf{M}_{\text{abc}} \bar{\mathbf{W}}_i[0])) \mathbf{Q}_i[n] \\ -\text{diag}(\text{Re}(\mathbf{M}_{\text{abc}} \bar{\mathbf{W}}_i[0])) \mathbf{Q}_i[n] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{diag}(\mathbf{D}^{\text{Re}}[0]) & \text{diag}(\mathbf{D}^{\text{Im}}[0]) \\ \text{diag}(\mathbf{D}^{\text{Im}}[0]) & -\text{diag}(\mathbf{D}^{\text{Re}}[0]) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_i^{\text{Re}}[n] \\ \mathbf{U}_i^{\text{Im}}[n] \end{bmatrix} \quad (19)$$

式中： $\mathbf{Q}_i[n]$ 为 PV 节点全纯函数 $\mathbf{Q}_i(s)$ 的 $n$ 阶系数；辅助变量 $\mathbf{L}[n-1]$ 、 $\mathbf{G}[n-1]$ 和 $\mathbf{D}[0]$ 的表达式为

$$\begin{cases} \mathbf{L}[n-1] = \mathbf{M}_{\text{abc}} \bar{\mathbf{W}}_i[n-1] \odot \bar{\mathbf{P}}_{id} - \mathbf{M}_{\text{abc}} \bar{\mathbf{W}}_i[0] \odot \left( \sum_{k=1}^{n-1} \bar{\mathbf{W}}_i[k] \odot \bar{\mathbf{V}}_i[n-k] \right) \odot \mathbf{P}_{i0} + \text{j}[\mathbf{M}_{\text{abc}} \bar{\mathbf{W}}_i[0] \odot \left( \sum_{k=1}^{n-1} \bar{\mathbf{W}}_i[k] \odot \bar{\mathbf{V}}_i[n-k] \right) \odot \mathbf{Q}_i[0]] - \text{j}[\mathbf{M}_{\text{abc}} \left( \sum_{k=1}^{n-1} \bar{\mathbf{W}}_i[k] \odot \bar{\mathbf{Q}}_i[n-k] \right)] \\ \mathbf{G}[n-1] = [\delta_{n0} |\mathbf{U}_{i0}|^2 + \frac{1}{2} \delta_{n1} (|\mathbf{U}_i^{\text{sp}}|^2 - |\mathbf{U}_{i0}|^2)] - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{U}_i[k] \odot \bar{\mathbf{U}}_i[n-k] \odot \left( \frac{1}{\mathbf{U}_i^{\text{Re}}[0]} \right) \\ \mathbf{D}[0] = \mathbf{M}_{\text{abc}} (\mathbf{P}_{i0} - \text{j}\mathbf{Q}_i[0]) \odot \bar{\mathbf{W}}_i[0] \odot \bar{\mathbf{W}}_i[0] \end{cases} \quad (20)$$

根据式(14)、(15)、(18)、(19)不同节点类型的灵活 HELM 三相潮流模型，构建不同阶幂级数系数的递归求解方程。并通过一定的矩阵变化，将 PV

节点待求量中的替换成待求量 $\mathbf{Q}_i$ 。此外，针对不接地节点，还需要增加不接地节点的约束方程，进一步松弛递归求解方程，递归求解方程的简化形式如下(详细过程见附录 C)：

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{b} \quad (21)$$

式中：从上一次潮流重启结束到下一次潮流重启开始， $\mathbf{A}$ 为线性方程常系数矩阵； $\mathbf{X}$ 为待求各阶幂级数系数向量； $\mathbf{b}$ 为由已知的 $n-1$ 阶幂级数系数构成的已知向量。需要注意，每一次潮流重启后，递归求解方程式(21)中的矩阵 $\mathbf{A}$ 需要进行重构。

本文算法求解流程如图 4 所示。

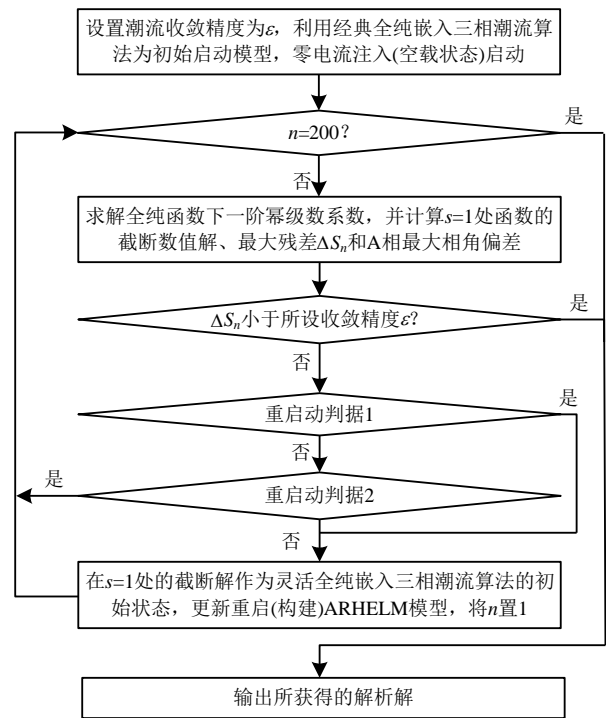


图 4 ARHELM 求解流程图

Fig. 4 ARHELM solution flow chart

### 3 算例分析

若无特别说明，本文将潮流计算的收敛精度 $\epsilon$ 设置为 $1 \times 10^{-6}$  pu。本文使用计算机平台硬件配置为 13th Gen Intel(R) Core(TM) i7-13620H(16 CPUs), ~2.40 GHz, 16 GB 内存的个人计算机；仿真软件平台采用 Matlab R2022b。

#### 3.1 算例介绍

本文采用的 IEEE 33 和 IEEE 123 系统是基于不平衡配电网的开源数据集，具体参数可查；本文改造的 IEEE 123 系统参数可见附录 D。Case 1152 为我国东北某区域系统，具体参数为：共 1152 个节点(包括 1043 个 PQ 节点、108 个 PV 节点、1 个平

衡节点)、1432 条支路(含变压器支路 528 条), 区域电网总装机容量为 19 555.1 MW、负荷总量约 18441 MW, 电压等级包含 500 与 220 kV。在此基础上, 本文对区域电网进行三相不平衡改造, 在节点 4(PQ 节点)的 A 相处减少 6MW 有功负荷, 增加 0.6MW 无功负荷。

### 3.2 算法准确性验证

本节中, 设置 IEEE 33、改造 IEEE 123 及 Case 1152 这 3 个系统的中性点均为接地, 变压器中性点接地方式为 YNYN0, 系统负载倍数为 1。将本文 ARHELM 与经典 HELM、NR 潮流算法进行对比, 以牛拉法的计算结果作为基准, 计算各电气量的最大相对误差, 如表 1 所示。

表 1 各系统中各电气量的最大相对误差  
Table 1 Maximum relative error of convergence results of different algorithms in each system

算法	系统规模	$ U /\%$	$\theta/\%$	$P/\%$	$Q/\%$
ARHELM	33 节点	$1.78 \times 10^{-11}$	$2.13 \times 10^{-13}$	$6.82 \times 10^{-10}$	$1.51 \times 10^{-9}$
	123 节点	$5.45 \times 10^{-5}$	$9.57 \times 10^{-5}$	$7.52 \times 10^{-4}$	$1.09 \times 10^{-3}$
	1152 节点	$7.36 \times 10^{-7}$	$4.28 \times 10^{-7}$	$1.38 \times 10^{-5}$	$2.61 \times 10^{-6}$
HELM	33 节点	$6.48 \times 10^{-7}$	$1.80 \times 10^{-5}$	$1.73 \times 10^{-5}$	$1.06 \times 10^{-5}$
	123 节点	$3.17 \times 10^{-5}$	$5.54 \times 10^{-4}$	$5.79 \times 10^{-6}$	$4.23 \times 10^{-6}$
	1152 节点	$6.47 \times 10^{-5}$	$2.46 \times 10^{-3}$	$6.25 \times 10^{-6}$	$1.02 \times 10^{-5}$

根据表 1 数据可以看出, 3 种算法的潮流结果均能够达到收敛条件。其中, 本文算法与 NR 法最大相对误差为 IEEE 123 节点系统中的节点编号为 123 的 PV 节点无功功率, 最大相对误差为 0.001 09%。因此, 本文算法在配电网工程应用上能够准确地进行配电网三相潮流计算分析。

### 3.3 算法计算效率分析

本文采用 Inter 公司开发的算法库 MKL 中的 pardiso 求解器进行浮点法计算, 分别计算 NR 法、经典 HELM、FFHELM 以及本文所提的 ARHELM, 在各算例系统中进行一次 LU 分解所需时间以及利用 LU 分解矩阵进行一次回代求解所需时间, 测算 100 次后取平均值, 输出结果如表 2 所示。其中 IEEE 123 节点系统为改造后的中性点不接地系统。

由表 2 可知, 矩阵 LU 分解所需时间明显高于矩阵回代求解计算时间。矩阵 LU 分解所需时间约为矩阵回代求解计算时间的 10~17 倍。这种现象在线路连接关系复杂的大规模系统中尤为明显。

相比于 NR 法在每次迭代过程中都需要进行矩阵 LU 分解和矩阵回代求解运算, 由于 HELM 在潮流计算中不需要形成 Jacobi 矩阵, 具有定常矩阵的

表 2 各系统 LU 分解时间与回代求解时间比较  
Table 2 Comparison of iterative solution time and recursive solution time

情形	系统规模	耗时/s			
		NR	HELM	FFHELM	ARHELM
矩阵 LU 分解	33 节点	$1.79 \times 10^{-4}$	$1.93 \times 10^{-4}$	$1.98 \times 10^{-4}$	$2.01 \times 10^{-4}$
	123 节点	$8.25 \times 10^{-4}$	$7.80 \times 10^{-4}$	$7.91 \times 10^{-4}$	$8.04 \times 10^{-4}$
	1152 节点	$1.02 \times 10^{-2}$	$9.91 \times 10^{-3}$	$9.96 \times 10^{-3}$	$9.90 \times 10^{-3}$
矩阵回代求解	33 节点	$1.80 \times 10^{-5}$	$2.14 \times 10^{-5}$	$2.16 \times 10^{-5}$	$2.27 \times 10^{-5}$
	123 节点	$5.99 \times 10^{-5}$	$6.30 \times 10^{-5}$	$5.56 \times 10^{-5}$	$5.63 \times 10^{-5}$
	1152 节点	$5.91 \times 10^{-4}$	$5.86 \times 10^{-4}$	$6.23 \times 10^{-4}$	$6.00 \times 10^{-4}$

优势, 因此在  $n$  阶递归求解过程中, 仅仅只需 1 次矩阵 LU 分解与  $n$  次矩阵回代运算。而本文提出的 ARHELM 由于引入了重启动机制, 与经典 HELM 相比, 在每一次重启之后, 需要更新矩阵  $A$ , 因此需要额外进行 1 次矩阵 LU 分解, 在一般情况下不可避免会降低计算效率。然而, 在重负载或病态网络中, HELM 需要更高的递归阶数, 而 ARHELM 通过重启动机制减少了递归阶数计算, 在一定程度上能够弥补额外进行矩阵 LU 分解带来的计算效率损失时间。

设置收敛精度  $\epsilon$  为  $1 \times 10^{-6}$  pu, 通过调节全局负载倍数来比较不同测试系统下 ARHELM、FFHELM、经典 HELM 和 NR 法 4 种方法所需的计算时间, 得到表 3。以牛拉法求取的系统空载状态作为 FFHELM 的“芽解”。表中“/”表示不收敛 (HELM 和 FFHELM 递归求解 500 次还未收敛则视为不收敛)。

由表 3 可见, 在 IEEE 33、改造 IEEE 123 以及 Case 1152 系统中, 本文算法具有较为稳定的重启次数和求解阶数。与 NR 法相比, 各计算场景下本文算法均具有更高的计算效率; 与经典 HELM 相比, 在轻载状态下, 计算效率相仿。但是, 当系统负载倍数较高时, 本文算法具有明显的计算效率优势。

例如, 在 IEEE 33 的 11.7 倍重负载情况下, 经典 HELM 需要 832 次递归求解才能收敛, 而本文算法仅需 2 次潮流重启, 将收敛阶数降低至 20 阶, 提升了大约 21 倍的计算效率; 在改造的 IEEE 123 系统的 3 倍重负载情况下, HELM 需要 165 次递归求解才能收敛至目标解, 而本文算法仅通过 1 次潮流重启动, 将收敛阶数降低至 18 阶, 提升了大约 5 倍的计算效率; 在 Case 1152 系统的 2.5~3.0 负载倍数下, HELM 出现潮流发散现象, 而本文算法通

表 3 ARHELM 与 NR、HELM、FFHELM 的计算时间比较  
Table 3 Computing time comparison of ARHELM, NR, HELM, and FFHELM

系统规模	负载倍数	NR		HELM		FFHELM		ARHELM		
		迭代次数	时间/s	收敛阶数	时间/s	收敛阶数	时间/s	收敛阶数	重启次数	时间/s
33 节点	0.5	4	$7.88 \times 10^{-4}$	4	$2.79 \times 10^{-4}$	3	$2.68 \times 10^{-4}$	4	0 次	$2.92 \times 10^{-4}$
	1.0	4	$7.88 \times 10^{-4}$	4	$2.79 \times 10^{-4}$	4	$2.84 \times 10^{-4}$	5	0 次	$3.15 \times 10^{-4}$
	3.0	4	$7.88 \times 10^{-4}$	4	$2.79 \times 10^{-4}$	8	$3.71 \times 10^{-4}$	5	0 次	$3.15 \times 10^{-4}$
	6.0	8	$1.58 \times 10^{-4}$	13	$4.71 \times 10^{-4}$	15	$5.22 \times 10^{-4}$	13	0 次	$4.96 \times 10^{-4}$
	11.7	10	$1.97 \times 10^{-3}$	832	$1.80 \times 10^{-2}$	306	$6.81 \times 10^{-3}$	20	2 次	$8.56 \times 10^{-4}$
123 节点	0.5	5	$4.42 \times 10^{-3}$	5	$1.10 \times 10^{-4}$	6	$1.12 \times 10^{-3}$	5	0 次	$1.09 \times 10^{-4}$
	1.0	5	$4.42 \times 10^{-3}$	8	$1.28 \times 10^{-4}$	9	$1.29 \times 10^{-3}$	8	0 次	$1.25 \times 10^{-4}$
	2.0	6	$5.31 \times 10^{-3}$	28	$2.54 \times 10^{-3}$	29	$2.40 \times 10^{-3}$	18	1 次	$2.62 \times 10^{-3}$
	2.5	7	$6.19 \times 10^{-3}$	165	$1.12 \times 10^{-2}$	119	$7.40 \times 10^{-3}$	18	1 次	$2.62 \times 10^{-3}$
	3.0	无解	—	无解	—	无解	—	无解	—	—
1152 节点	0.5	5 次	$5.40 \times 10^{-2}$	7 阶	$1.40 \times 10^{-2}$	6	$1.37 \times 10^{-2}$	7 阶	0 次	$1.41 \times 10^{-2}$
	1.0	5 次	$5.40 \times 10^{-2}$	10 阶	$1.57 \times 10^{-2}$	9	$1.56 \times 10^{-2}$	10 阶	0 次	$1.59 \times 10^{-2}$
	2.0	5 次	$5.40 \times 10^{-2}$	19 阶	$2.10 \times 10^{-2}$	不收敛	/	19 阶	0 次	$2.13 \times 10^{-2}$
	2.5	6 次	$6.47 \times 10^{-2}$	不收敛	/	不收敛	/	18 阶	1 次	$3.06 \times 10^{-2}$
	3.0	7 次	$7.55 \times 10^{-2}$	不收敛	/	不收敛	/	19 阶	1 次	$3.12 \times 10^{-2}$

过 1 次重启，将收敛阶数降低至 18~19 阶；与 FFHELM 相比，在轻载状态下，收敛性能相仿，但当系统负载加重，以空载状态启动 FFHELM 收敛性较差，而 ARHELM 仍然能够实现稳定收敛。根据上述分析，本文算法相较于 FFHELM、NR 法和经典 HELM 在实际工程应用中不同负载情况下具有较好的计算效率和收敛性能。

### 3.4 算法收敛性分析

#### 3.4.1 电压初值对算法收敛的影响

在不同收敛精度下，将电压初值选取范围设置为 0.90~1.00 pu，负载倍数设置为 1 倍，以 0.01 pu 为步长不断改变电压初值，分析 4 种方法在改造 IEEE 123 系统上的收敛情况。表 4 为该系统中心节点 112(PQ 节点)的 A 相潮流计算结果。

表 4 不同电压初值下 4 种方法的收敛结果

Table 4 Convergence results of the four methods under different initial voltage values

收敛精度/pu	初值/pu	电压幅值/pu				相角/(°)			
		ARHELM	NR	HEM	FFHELM	ARHELM	NR	HEM	FFHELM
$1 \times 10^{-3}$	0.90	1.01	/	1.01	1.01	-17.1	/	-17.1	-17.1
	0.91	1.01	0.98	1.01	1.01	-17.1	-163.7	-17.1	-17.1
	0.92	1.01	/	1.01	/	-17.1	/	-17.1	/
	0.93	1.01	0.98	1.01	1.00	-17.1	-163.7	-17.1	-37.4
	0.94~1.00	1.01	1.01	1.01	1.01	-17.1	-17.1	-17.1	-17.1
$1 \times 10^{-6}$	0.90	1.01	1.01	1.01	1.01	-17.1	-17.1	-17.1	-17.1
	0.91	1.01	0.98	1.01	1.01	-17.1	-163.7	-17.1	-17.1
	0.92	1.01	/	1.01	/	-17.1	/	-17.1	/
	0.93	1.01	0.98	1.01	1.00	-17.1	-163.7	-17.1	-37.4
	0.94~0.99	1.01	1.01	1.01	1.01	-17.1	-17.1	-17.1	-17.1

由表 4 可以看出，当初值选取不合理，NR 法的计算结果出现发散，或收敛至大相角的低电压解上，初值依赖问题明显。对于 FFHELM 来说，由于空载状态下通过 NR 法在初值为 0.91 和 0.93 pu 时得到低电压解，进一步地导致 FFHELM 分别出现不收敛和收敛至低电压解。经典 HELM 和本文的 ARHELM 在较轻负载状态下，在 0.90~1.00 pu 初值

条件下，均能实现潮流可靠收敛。

为进一步分析本文算法的非初值依赖优势，设置收敛精度为  $1 \times 10^{-6}$  pu，同时改变电压初值和负载倍数。电压初值范围为 0.90~1.00 pu，步长为 0.01 pu，负载倍数范围为 0.5~2.5 倍，步长为 0.1 倍。得到 NR、经典 HELM、FFHELM(以空载状态启动)和 ARHELM 在不同负载、不同电压初值下的收敛结

果,如图5所示。可以看出:本文 ARHELM 在电压初值 0.90~1.00 pu、负载倍数在 0.5~2.5 倍以上均能够稳定可靠收敛至高电压解,具有良好收敛性能;NR 法和 FFHELM 均存在较为明显的初值敏感问题, NR 法在电压初值为 0.90~0.93 pu 时,无论是轻载还是重载情况下,都存在收敛至低电压解或出现不收敛;由于 NR 法的初值依赖问题, NR 提供给 FFHELM 的“芽解”可能为低电压解,当 FFHELM 以该低电压解作为“芽解”进行解析延拓后,也会导致无法收敛或是收敛至低电压解的问题;经典三相 HELM 具有较好的非初值依赖性,但当电压初值为 0.90~0.91 pu、系统负载倍数为 2.4 和 2.5 倍时,出现停滞收敛现象,无法收敛,表明其在重负载时系统收敛性变差。

3.4.2 算法收敛过程分析

由图5、表3—4结果分析可知,在部分电压初

值下的 NR 法、FFHELM 和部分重负载场景下的经典 HELM 都存在着收敛性问题。为体现本文算法较好的收敛性,针对潮流收敛具体过程,将本文算法分别与 NR 法收敛至低电压解、经典 HELM 需要高阶收敛和 FFHELM 收敛至低电压解的收敛轨迹和残差变化进行对比分析(改造 IEEE 123 系统,节点 119, PV 节点, A 相数据),结果如图6所示。图6是 NR 法、经典 HELM、FFHELM 和 ARHELM 在改造 IEEE123 系统中的潮流收敛轨迹和残差变化过程。其中,图6(a)是电压初值为 0.9 pu,负载倍数为 1 时,ARHELM 和 NR 法的潮流收敛轨迹和残差变化过程。图6(b)是电压初值为 1 pu,负载倍数为 2.5 时,ARHELM 和 HELM 的潮流收敛轨迹和残差变化过程。图6(c)是电压初值为 0.93 pu,负载倍数为 1 时,ARHELM 和 FFHELM 的潮流收敛轨迹和残差变化过程。

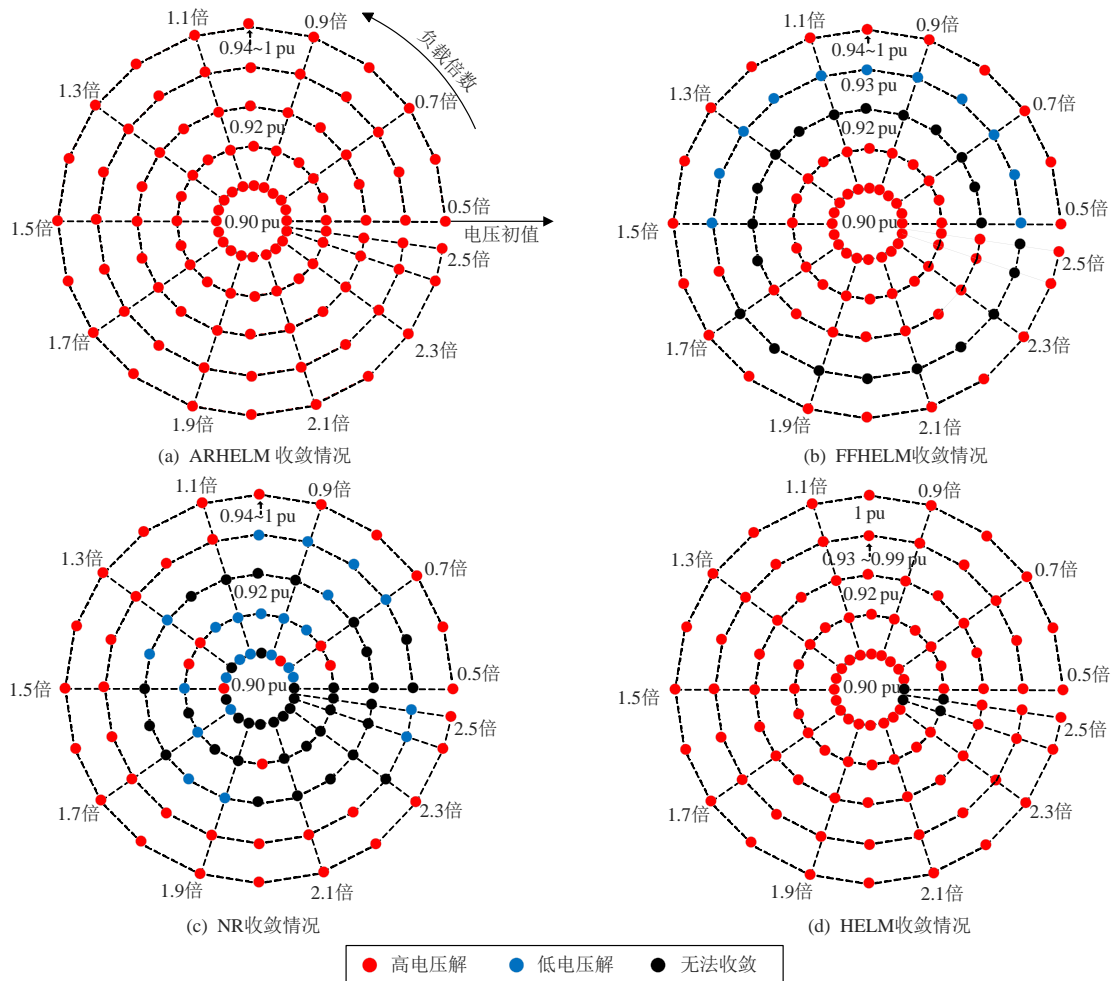


图5 不同电压初值、负载倍数 NR、HELM、FFHELM 和 NR 收敛结果

Fig. 5 Convergence results of different voltage initial values and load multiples for NR, HELM, FFHELM and NR

可以发现,图6(a)中 NR 法的收敛过程为先发散后收敛,最终通过 28 次迭代收敛至低电压解;

图6(b)中 ARHELM 在潮流计算重启前和 HELM 的收敛轨迹一样,在通过潮流计算重启之后,明显加

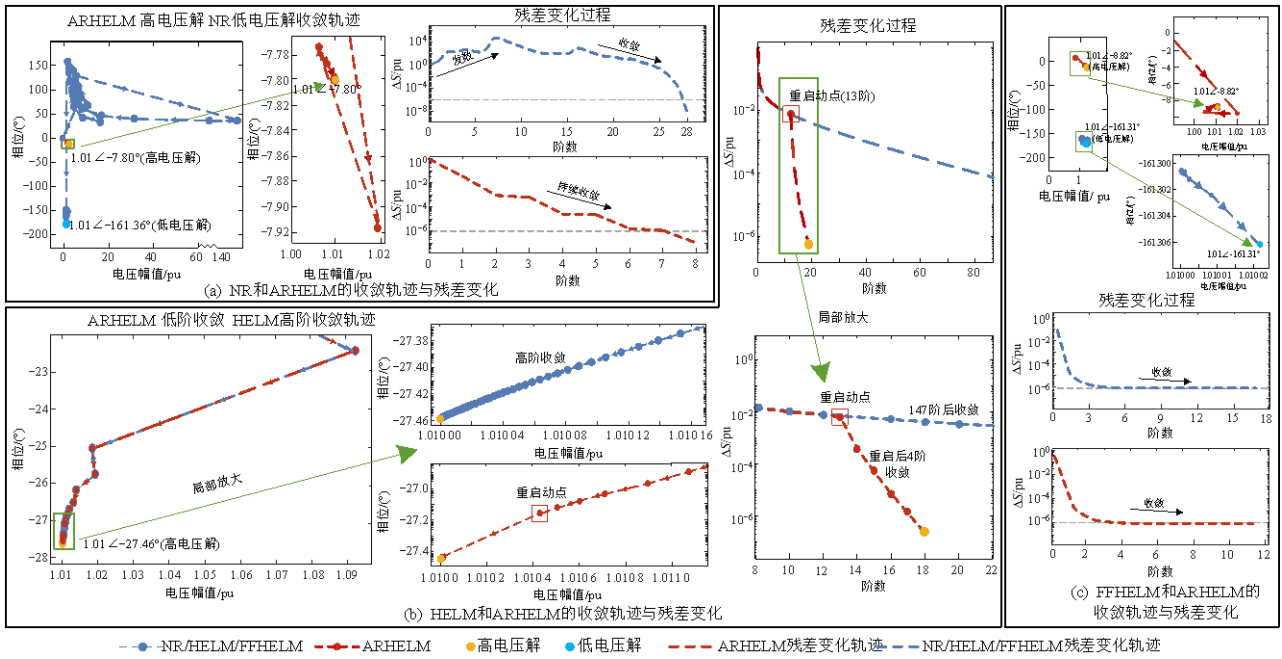


图 6 NR、HELM、FFHELM 和 ARHELM 收敛路径和残差变化分析

Fig. 6 Analysis of convergence path and residual variation of NR, HELM, FFHELM and ARHELM

快了潮流收敛过程，大幅度降低收敛阶数。而相比 ARHELM 在潮流计算重启后仅需 4 阶收敛，HELM 仍需要进行高阶幂级数计算，147 次递归求解后收敛；图 6(c)中 FFHELM 以一个低电压“芽解”开始在低电压分支上进行解析延拓，最终也得到了一个低电压解，而 ARHELM 具有较好的非初值依赖性，能够可靠收敛。通过上述分析，本文所提方法能够有效改善三相潮流算法中 NR 和 FFHELM 的初值敏感问题以及经典 HELM 在重负载系统中需要进行高阶幂级数计算的问题。

### 3.4.3 算法收敛半径分析

若 Padé 近似函数满足 Stahl 假设时，其极值域  $D$  将与收敛域  $D_f$  相同。而在极值域的边界上会累积大量的零极点，这些零极点对是函数的不收敛位置<sup>[31-32]</sup>。因此，定义 Padé 近似函数的零极点形成的近似圆半径为收敛半径  $R$ ， $R$  的数值大小能够反映所获取解析函数的收敛性能。

下文在高精度条件下( $\varepsilon$  为  $1 \times 10^{-10}$  pu)将全纯函数的 Taylor 展开式截断至 500 阶，用以进行 Padé 近似计算(计算 500 阶是为了更加清晰地绘制收敛半径)，并绘制其零极点分布图，分析本文重启机制对于收敛半径的影响。

由 3.4.1 和 3.4.2 节分析可知，在重负载条件下改造的 IEEE 123 系统中，经典 HELM 出现潮流收敛缓慢的情况，需要进行高阶幂级数系数计算，而本文算法通过重启机制能够有效降低收敛阶数，

提高计算效率。针对此计算场景，绘制出潮流重启前后的零极点分布，如图 7 所示。

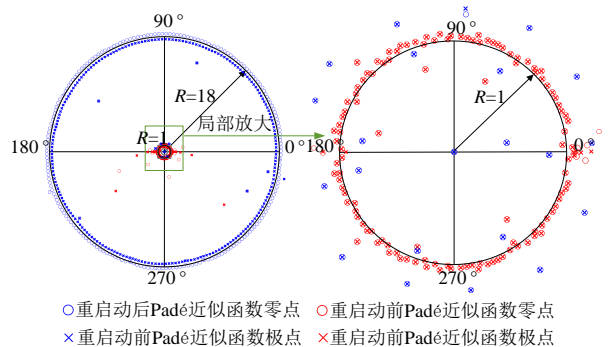


图 7 HELM 高阶收敛情况下潮流重启对收敛半径的影响  
Fig. 7 Influence of power flow restart on convergence radius in the case of high-order convergence of HELM

结合图 7 和图 6(b)可知，潮流重启前，经典 HELM 在重负载情况下得到的 Padé 近似函数的零极点近似圆收敛半径  $R \approx 1$ 。而通过潮流重启机制，有效地将收敛半径  $R$  扩大至 18，而重启后模型仅需 4 次递归求解就能快速收敛到低电压解。

由于 FFHELM 能够以任意状态作为“芽解”进行潮流启动，相比于经典 HELM 具有提高潮流计算效率的潜力。因此，将电压初值设置为 0.93 pu，系统负载倍数设置为 2.5 倍。将 FFHELM 分别以空载状态及 0.5、1.0、2.0 倍负载状态启动，并绘制其零极点分布情况，与本文算法对比分析，零极点图如图 8 所示。

由图 8(a)可知：FFHELM 以越靠近系统负载倍

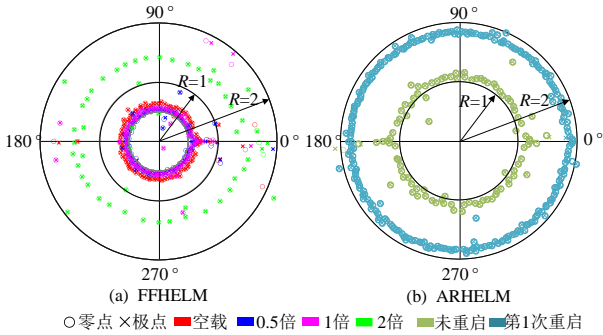


图8 不同“芽解”对FFHELM的收敛半径的影响

Fig. 8 Influence of different germ on the convergence radius of FFHELM

数的状态启动,其收敛半径越大;当FFHELM以空载及0.5、1倍负载倍数状态为“芽解”启动潮流计算时,由于零极点对近似圆的半径小于1,此时FFHELM无法收敛;当以2倍负载状态为“芽解”启动潮流计算时,零极点对近似圆半径大于1,FFHELM递归求解39阶后收敛。图8(b)的ARHELM在未潮流重启前零极点对近似圆的半径约等于1,此时潮流收敛缓慢,通过潮流重启后,将收敛半径扩大约1倍。ARHELM在潮流计算中

重启1次,共15阶收敛。FFHELM以不同注入功率状态启动潮流计算的收敛半径不同,其最优的“芽解”状态也难以寻找。本文ARHELM作为FFHELM的一种改进方法,所提自适应重启机制实质上是一种“芽解”的寻优过程。尤其是在大规模、重负载的系统中,ARHELM通过在功率注入空间中的合适位置进行潮流重启,有效扩大收敛半径,从而提高算法的收敛性和计算效率。

进一步地,在改造的IEEE 123系统中,将负载倍数设置为2.5倍、三相变压器变比调整为非标准变比1.2:1,发现经典HELM的潮流求解过程出现先缓慢收敛后发散现象。而本文算法ARHELM通过3次潮流重启动,最终实现了潮流快速可靠收敛。针对此计算场景,绘制重启前后的零极点分布,如图9所示。同时,给出HELM和ARHELM的残差变化过程,如图10所示。

从图9中可以看出,在潮流重启动之前,经典HELM的近似圆收敛半径 $R < 1$ ,此时由零极点对形成的分支切割线阻碍了经典HELM从 $s=0 \sim 1$ 的解析延拓路径,可能会导致全纯函数的截断解产生数值

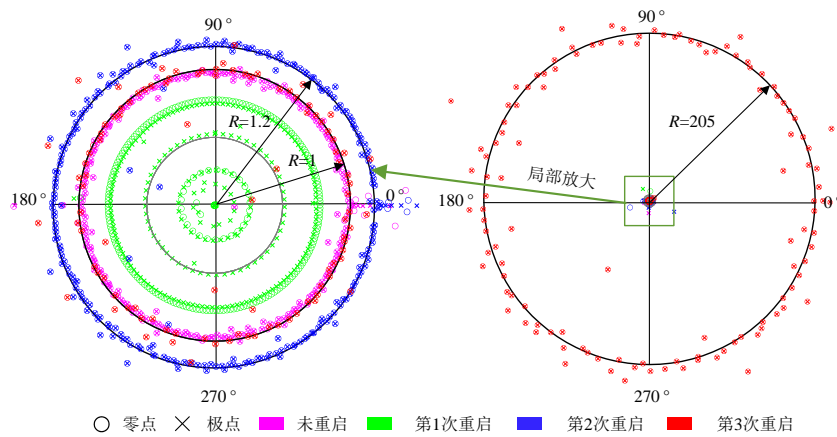


图9 发散情况下潮流重启对收敛半径的影响

Fig. 9 Influence of power flow restart on convergence radius in divergent case

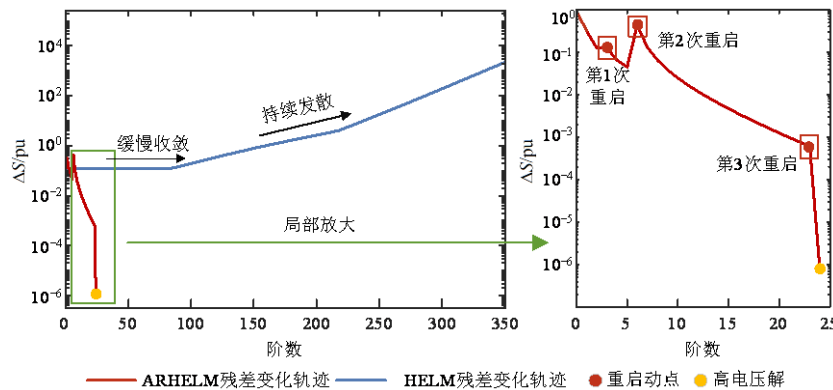


图10 发散情况下ARHELM和HELM的残差变化情况

Fig. 10 Residual changes of ARHELM and HELM in the case of divergence

问题，造成图 10 中 HELM 三相潮流算法的潮流解先出现缓慢收敛后持续发散的现象。本文算法 ARHELM 首先基于式(11)的判据 1，进行第 1 次潮流重启，解决了缓慢收敛的问题，但重启后发现此时的收敛半径  $R < 1$ ，甚至相较于重启前更小。结合图 10 也可以看出，第 1 次重启后到第 2 次重启前的求解过程中，出现了潮流发散的现象，可能是由于此时的潮流解析延拓路径已经靠近零极点对近似圆的边界，引发了数值问题导致潮流发散。因此，此时需要基于式(13)的潮流重启判据 2，在具有实际物理意义的潮流状态下重新进行潮流重启，扩大收敛半径，解决潮流发散问题。结合图 9、10 可以看出，在第 2 次潮流重启后，收敛半径  $R$  大于 1，最大残差朝着目标精度逐阶缩小，这意味着潮流解在不断逼近目标状态。但此时的大量零极点对仍然处于  $R=1$  附近，同样容易出现潮流缓慢收敛或出现停滞解的结果。因此，需要基于判据 1 再次进行潮流重启，从图 9、10 可以看出，此时的收敛半径  $R$  已经扩大到了 205 左右，并且在此次重启后，仅需 1 阶递归求解便实现收敛。

本文发现在重负载系统中，调整部分变压器为非标准变比后，经典 HELM 在潮流计算过程中出现先缓慢收敛后发散的现象。本文算法在面对潮流缓慢收敛时会基于判据 1 进行潮流重启，提升了算法的计算效率。面对潮流发散时会基于判据 2 进行潮流重启，虽然降低了计算效率，但是保障了解的可靠性。通过两个判据相互配合，使得本文算法具有较好的收敛性能，部分算例在表 5 给出。

表 5 非标准变比下 HELM 和 ARHELM 的收敛情况

Table 5 Convergence of HELM and ARHELM under non-standard variable ratio

非标准 变比	HELM 收敛情况	ARHELM	
		重启次数	递归阶数
1.01:1	发散	1	9
1.03:1	发散	1	8
1.05:1	发散	1	8
1.07:1	发散	1	11
1.09:1	发散	1	14
1.11:1	发散	1	21
1.13:1	发散	2	20
1.15:1	发散	2	24

## 4 结论

针对经典 HELM 三相潮流算法在大规模、重负

载配电网三相系统中的收敛性问题，本文提出一种基于自适应重启的配电网全纯嵌入三相潮流算法 ARHELM，得到如下结论：

1) 本文所提 ARHELM 能够避免初值依赖问题，具有较好的收敛性能，在大规模、重负载配电网三相系统中能够实现潮流快速、可靠计算。

2) 本文所提自适应重启机制能够针对不同的配网系统，以及潮流求解过程的具体情况进行动态响应，灵活调整重启的时机，具有较强的普适性。

3) 本文所提自适应重启机制能够有效扩大收敛半径，为三相系统中潮流计算的收敛域分析提供了相关参考，同时为提高潮流算法收敛性能提供了新思路。

值得说明的是：1) 本文算法在部分运行场景下进行潮流重启后，出现了收敛半径收缩的现象，这可能会影响全纯函数的解析延拓过程，目前无法给出解释；2) 由于本文所提 ARHELM 主要是针对断面潮流进行计算，而如何进一步考虑新型电力系统的潮流不确定性，较为全面地评估电力系统的安全稳定，都是后续的研究重点。

## 参考文献

- [1] 马瑞, 敖维安. 三相不平衡主动配电网随机模糊安全距离研究[J]. 中国电机工程学报, 2020, 40(23): 7600-7608. MA Rui, AO Wei'an. Research on random fuzzy safety distance of active distribution network considering three-phase unbalance[J]. Proceedings of the CSEE, 2020, 40(23): 7600-7608(in Chinese).
- [2] 欧杰宇, 张逸, 辛荣, 等. 基于多智能体深度强化学习的低压配电网电能质量分散式协同调控策略[J]. 中国电机工程学报, 2024, 45(21): 8308-8322. OU Jieyu, ZHANG Yi, XIN Rong, et al. Decentralized coordinated control strategy for power quality in low voltage distribution networks based on multi-agent deep reinforcement learning[J]. Proceedings of the CSEE, 2024, 45(21): 8308-8322(in Chinese).
- [3] 黄彦浩, 裘微江, 杜三恩, 等. 电网智能仿真分析技术发展路径研究[J]. 新型电力系统, 2025, 3(4): 375-383. HUANG Yanhao, QIU Weijiang, DU Sanen, et al. Research on the development path of intelligent power grid simulation analysis technology[J]. New Type Power Systems, 2025, 3(4): 375-383(in Chinese).
- [4] 高元海, 王淳, 辛建波, 等. 计及接地阻抗及含多种分布式电源的中低压配电网三相潮流计算(一): 模型[J]. 中国电机工程学报, 2016, 36(10): 2619-2627. GAO Yuanhai, WANG Chun, XIN Jianbo, et al.

- Three-phase power flow calculation of medium-low voltage distribution network considering grounding impedance and containing various distributed generators, part I: models[J]. Proceedings of the CSEE, 2016, 36(10): 2619-2627(in Chinese).
- [5] 杨焕燕. 不对称配网的三相潮流与状态估计方法研究[D]. 重庆: 重庆大学, 2013.  
YANG Huanyan. Research on three-phase power flow and state estimation methods for asymmetrical distribution networks[D]. Chongqing: Chongqing University, 2013(in Chinese).
- [6] ZHANG Fan, CHENG C S. A modified Newton method for radial distribution system power flow analysis[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 1997, 12(1): 389-397.
- [7] SHIRMOHAMMADI D, HONG H W, SEMLYEN A, et al. A compensation-based power flow method for weakly meshed distribution and transmission networks[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 1988, 3(2): 753-762.
- [8] 李雪, 姚超凡, 姜涛, 等. 基于常项值和先验节点的全纯嵌入潮流计算方法[J]. 电力自动化设备, 2023, 43(2): 142-150.  
LI Xue, YAO Chaofan, JIANG Tao, et al. Constant values and priori buses based holomorphic embedding load flow method[J]. Electric Power Automation Equipment, 2023, 43(2): 142-150(in Chinese).
- [9] 刘承锡, 罗永建, 董旭柱. 基于全纯嵌入及帕德近似零极点侦测的电压稳定裕度评估算法[J]. 电网技术, 2024, 48(9): 3790-3800.  
LIU Chengxi, LUO Yongjian, DONG Xuzhu. Voltage stability margin evaluation algorithm based on holomorphic embedded and Pad $\acute{e}$  approximation zero-pole detection[J]. Power System Technology, 2024, 48(9): 3790-3800(in Chinese).
- [10] 陈飞雄, 吴鸿斌, 邵振国, 等. 一种高阶仿射型潮流及其递归求解方法[J]. 中国电机工程学报, 2024, 45(12): 4608-4619.  
CHEN Feixiong, WU Hongbin, SHAO Zhenguo, et al. A High-order Affine Power Flow Algorithm and Its Recursion Solution Method[J]. Proceedings of the CSEE, 2024, 45(12): 4608-4619(in Chinese).
- [11] 丁明, 郭学风. 含多种分布式电源的弱环配电网三相潮流计算[J]. 中国电机工程学报, 2009, 29(13): 35-40.  
DING Ming, GUO Xuefeng. Three-phase power flow for the weakly meshed distribution network with the distributed generation[J]. Proceedings of the CSEE, 2009, 29(13): 35-40(in Chinese).
- [12] TRIAS A. The holomorphic embedding load flow method[C]//Proceedings of Power and Energy Society General Meeting. San Diego: IEEE, 2012: 1-8.
- [13] 邵振国, 李壹民, 颜熙颖, 等. 基于全纯嵌入的电力系统不确定性仿射潮流方法[J]. 中国电机工程学报, 2024, 44(01): 105-117.  
SHAO Zhenguo, LI Yimin, YAN Xiyang, et al. Affine power flow algorithm for power system based on holomorphic embedding method[J]. Proceedings of the CSEE, 2024, 44(01): 105-117(in Chinese).
- [14] 刘承锡, 于懿兰, 赖秋频. 基于全纯嵌入法的电力系统高维电压稳定边界[J]. 中国电机工程学报, 2024, 44(23): 9111-9121.  
LIU Chengxi, YU Yilan, LAI Qiupin. Analytical high-dimensional static voltage stability boundary based on holomorphic embedding method[J]. Proceedings of the CSEE, 2024, 44(23): 9111-9121(in Chinese).
- [15] WANG Tao, CHIANG H D. On the holomorphic and conjugate properties for holomorphic embedding methods for solving power flow equations[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2020, 35(4): 2506-2515.
- [16] RAO S, FENG Yang, TYLAVSKY D J, et al. The holomorphic embedding method applied to the power-flow problem[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2016, 31(5): 3816-3828.
- [17] TRIAS A, MARIN J L. The holomorphic embedding loadflow method for DC power systems and nonlinear DC circuits[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 2016, 63(2): 322-333.
- [18] 李雪, 李博, 姜涛, 等. 主动配电网潮流的全纯嵌入计算方法[J]. 中国电机工程学报, 2024, 44(11): 4210-4227.  
LI Xue, LI Bo, JIANG Tao, et al. A holomorphic embedding power flow algorithm for active distribution network[J]. Proceedings of the CSEE, 2024, 44(11): 4210-4227(in Chinese).
- [19] 姜涛, 张勇, 李雪, 等. 电力系统交直流潮流的全纯嵌入计算[J]. 电工技术学报, 2021, 36(21): 4429-4443, 4481.  
JIANG Tao, ZHANG Yong, LI Xue, et al. A holomorphic embedded method for solving power flow in hybrid AC-DC power system[J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2021, 36(21): 4429-4443, 4481(in Chinese).
- [20] SUN Liping, JU Yuntao, YANG Lin, et al. Holomorphic embedding load flow modeling of the three-phase active distribution network[C]//Proceedings of 2018 International Conference on Power System Technology. Guangzhou: IEEE, 2018: 488-495.
- [21] 张逸, 蓝天, 李传栋, 等. 基于全纯嵌入法的三相潮流通用算法[J]. 中国电机工程学报, 2024, 44(20): 8024-8038.  
ZHANG Yi, LAN Tian, LI Chuandong, et al. A general

- three-phase power flow algorithm based on holomorphic embedding method[J]. Proceedings of the CSEE, 2024, 44(20): 8024-8038(in Chinese).
- [22] ZHANG Yi, LAN Tian, LI Chuandong, et al. Holomorphic embedding method based three-phase power flow algorithm considering the sensitivity of the initial value[J]. International Journal of Electrical Power & Energy Systems, 2024, 162: 110271.
- [23] TRIAS A, MARÍN J L. A Padé-Weierstrass technique for the rigorous enforcement of control limits in power flow studies[J]. International Journal of Electrical Power & Energy Systems, 2018, 99: 404-418.
- [24] 李思儒. 全纯嵌入法潮流与暂态稳定计算原理与应用[D]. 杭州: 浙江大学, 2021.
- LI Siru. Principle and application of holomorphic embedding load flow and transient stability calculation[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2021(in Chinese).
- [25] CHIANG H D, WANG Tao, SHENG Hao. A novel fast and flexible holomorphic embedding power flow method[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2018, 33(3): 2551-2562.
- [26] FREITAS F D, SANTOS JR A C, FERNANDES L F J, et al. Restarted holomorphic embedding load-flow model based on low-order Padé approximant and estimated bus power injection[J]. International Journal of Electrical Power & Energy Systems, 2019, 112: 326-338.
- [27] 高亚静, 苗宏佳, 吴文传, 等. 处理不接地配电网三相潮流不收敛的变压器建模新方法[J]. 电力系统自动化, 2014, 38(18): 53-57.
- GAO Yajing, MIAO Hongjia, WU Wenchuan, et al. A novel transformer modeling method for overcoming divergence of three-phase power flow in ungrounded power distribution networks[J]. Automation of Electric Power Systems, 2014, 38(18): 53-57(in Chinese).
- [28] 刘承锡, 赖秋频, 姚良忠, 等. 基于全纯嵌入法的电力系统解耦模型: 薄弱节点辨识[J]. 中国电机工程学报, 2022, 42(5): 1736-1747.
- LIU Chengxi, LAI Qiupin, YAO Liangzhong, et al. Power system decoupling model based on holomorphic embedding method: weak bus identification[J]. Proceedings of the CSEE, 2022, 42(5): 1736-1747(in Chinese).
- [29] TRIAS A. Fundamentals of the holomorphic embedding load-flow method[J]. CoRR, 2015, abs/1509. 02421.
- [30] 黄莹. 全纯嵌入理论在新形态电力系统潮流计算中的应用研究[D]. 武汉: 华中科技大学, 2022.
- HUANG Ying. Application of holomorphic embedding theory in power flow calculation of new-pattern power grids[D]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2022(in Chinese).
- [31] LI Songyan, TYLAVSKY D, SHI D, et al. Implications of Stahl's theorems to holomorphic embedding part I: theoretical convergence[J]. CSEE Journal of Power and Energy Systems, 2021, 7(4): 761-772.
- [32] DRONAMRAJU A, LI Songyan, LI Qirui, et al. Implications of Stahl's theorems to holomorphic embedding part II: numerical convergence[J]. CSEE Journal of Power and Energy Systems, 2021, 7(4): 773-784.

## 附录

<http://ntps.epri.sgcc.com.cn/djgxcb/CN/10.13334/j.0258-8013.pcsee.242848>



张逸

在线出版日期: 2025-08-20。

收稿日期: 2024-12-29。

作者简介:

张逸(1984), 男, 博士, 副教授, 研究方向为电能质量、主动配电网及电力数据分析等, zhangyi@fzu.cn;

蔡伟杰(2001), 男, 硕士研究生, 研究方向为电能质量分析, 18065080414@163.com;

\*通信作者: 李传栋(1979), 男, 博士, 副教授, 主要研究方向为电网分析、电网规划等, lichuandong@126.com;

蓝天(2000), 男, 硕士研究生, 研究方向为电能质量分析, email2000lt@163.com;

林志宇(2002), 男, 硕士研究生, 研究方向为电能质量分析, 919978746@qq.com。

(责任编辑 李泽荣)