

配电网的序列修正二阶锥优化方法： 以无功优化模型和光伏承载力评估模型为例

袁懿¹, 丁涛^{1*}, 穆程刚¹, 贾文皓¹, 张寓涵², 白兴忠²

- 西安交通大学电气工程学院, 陕西省 西安市 710049;
- 陕西电力交易中心有限公司, 陕西省 西安市 710048)

Sequential Modified Second-order Cone Programs for Global Optimization in Distribution Networks: Reactive Power Optimization and Photovoltaic Capability Assessment

YUAN Yi¹, DING Tao^{1*}, MU Chenggang¹, JIA Wenhao¹, ZHANG Yuhao², BAI Xingzhong²

- School of Electrical Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, Shaanxi Province, China;
- Shaanxi Power Exchanged Center Co., Ltd., Xi'an 710048, Shaanxi Province, China)

ABSTRACT: To address the computational errors and infeasibility caused by non-convex constraint relaxations in distribution network optimization, this paper proposes a sequential modified second-order cone (SMSOC) optimization method to enhance both accuracy and efficiency under distributed generation penetration. The proposed method transforms the non-convex problem into a bilevel programming structure and employs the S-procedure and Schur complement to construct a strong duality gap condition between the primal and dual problems. This mechanism iteratively corrects relaxation errors and ensures convergence to the Karush-Kuhn-Tucker (KKT) point of the original problem. The effectiveness of the method is verified using two case studies: a reactive power optimization model and a photovoltaic carrying capacity assessment model. Numerical results demonstrate that the SMSOC method achieves a convergence precision of 1×10^{-6} and reduces computation time by 1.5~4.7 times compared with existing algorithms. The results indicate that the proposed method reduces convex relaxation errors while maintaining high computational efficiency, providing a practical and accurate tool for large-scale distribution network optimization.

KEY WORDS: non-convex optimization; distribution network optimization; photovoltaic carrying capacity; reactive power optimization; Schur complement

基金项目: 陕西电力交易中心有限公司项目(SDJY-WT-YJ-2024-02); 国家自然科学基金项目(52277123).

Project Supported by Shaanxi Power Exchange Center Co., Ltd. (SDJY-WT-YJ-2024-02); Project Supported by National Natural Science Foundation of China (52277123).

摘要: 针对配电网优化中因非凸约束松弛导致的计算误差与解不可行问题, 该文提出一种序列修正二阶锥(sequential modified second-order cone, SMSOC)优化方法, 以提高分布式电源接入场景下的求解精度与计算效率。通过将非凸优化问题转化为双层规划结构, 引入 S-procedure 与舒尔补(Schur complement)构建原问题与对偶问题的强对偶间隙条件, 从而在迭代过程中逐步修正松弛误差, 使算法可收敛至原问题的 Karush-Kuhn-Tucker (KKT)点。为验证算法性能, 以配电网无功优化模型与光伏承载力评估模型为算例, 分别对比了传统二阶锥规划(second-order cone programming, SOCP)松弛法与改进算法的收敛特性和计算效率。仿真结果表明, SMSOC 方法的收敛精度可达 1×10^{-6} , 计算时间较现有方法缩短 1.5~4.7 倍, 在多个系统中均实现了解的快速收敛与高可行性。研究表明, 该方法能够在保证计算效率的同时显著降低凸松弛误差, 为大规模配电网的精确优化提供了一种高效可行的解决途径。

关键词: 非凸优化; 配电网优化; 光伏承载力; 无功优化; 舒尔补

0 引言

在“双碳”目标与新型电力系统背景下, 以风电光伏为代表的分布式电源大量接入配电网, 我国新型电力系统逐渐呈现新能源高占比的特征^[1-3]。由此带来的配电网变压器容量过载、区域反向潮流等问题日趋严重, 传统配电网模型亟待适应新型电力系统某些场景下的精确计算与工程应用^[4-6]。

目前, 广泛使用简化后的支路潮流模型^[7-9]。该模型将原本复数域的变量关系降维至实数域, 并使用松弛技术对非凸约束进行放松。文献[10]首次运

用二阶锥规划(second-order cone programming, SOCP)技术将辐射状配电网模型转化为二阶锥(second-order cone, SOC)模型,并将其推广至环网。文献[11]推导二阶锥松弛(second-order cone relaxation, SOCR)技术在三相潮流方程中的凸化松弛过程,并建立了三相 Distflow 潮流的辐射状配电网有功-无功动态协调优化模型。文献[12]提出计及风电相关性的多面二阶锥动态随机最优潮流模型。文献[13]首次提出利用半定松弛(semi-definite relaxation, SDR)技术求解最优潮流(optimal power flow, OPF)问题的方法,并开发了对应的内点法算法解决非凸非线性问题。文献[14]建立了基于半正定松弛与最优分割的 OPF 模型,并利用帕累托前沿^[15]与严格约束^[16]的概念讨论了该松弛条件的适用场景。文献[17]首次推导了 SDR 精确松弛的充要条件,并对所提条件进行了检验。文献[18-19]梳理了有关 OPF 的凸松弛理论,给出 OPF 模型中 SOCR、SDR 的完整数学形式,比较两类松弛的特点,并总结了精确松弛的充分条件。然而,凸松弛的精确性与原问题的目标函数及边界条件密切相关^[20-23],上述的各类精确凸松弛技术均需要在一定条件下成立,如电网中不存在反向潮流等,而在实际应用场景中,目标函数各异,边界条件多样,期望通过一种普适化的方法来保证凸松弛的精确性是极为困难的。

为了提高求解精确性,文献[24-25]提出一种策略分解方法,将原问题分解为各子问题的对偶问题,通过增加辅助变量的方式利用交替方向乘子法(alternating direction method of multipliers, ADMM)来解决 OPF 问题,并利用择一性定理推导了二者的强对偶性^[20]。然该方法受相邻节点之间交互变量的影响,各节点子问题必须按系统拓扑有序计算,导致求解过程中的计算复杂度显著提升,而这种有序过程在大多数优化问题中是不必要的。

因此,本文针对配电网中非凸约束经过松弛后不精确的问题,提出一种序列修正二阶锥(sequential modified second-order cone, SMSOC)优化算法,将原始非凸约束问题转换为上层 SOCP 问题和下层多个含有单一二次约束的二次规划(quadratic programming with one quadratic constraint, QP1QC)子问题,通过上下层迭代优化,确保算法收敛后的非凸二次等式约束严格成立。与文献[24-25]研究不同,本文下层模型虽按节点拆分为子问题,但无需

增加各节点间的交互变量,各节点间相互独立,可并行计算,大大节省了计算时间。上层模型可集中式求解,由上层模型确保各变量之间的物理约束,在上下层迭代优化过程中逐步满足约束一致性,保证了非凸等式约束严格成立。相比于非线性配电网潮流模型或松弛下的配电网模型,本文所提 SMSOC 算法的贡献如下:

1) 非凸约束处理: SMSOC 算法通过上下层协调优化来确保非凸等式约束的严格成立,从而提高结果的可信度,并保证求解结果满足误差精度。

2) 策略性问题分解: 通过引入辅助变量,将原始非凸问题进行策略性分解,并利用舒尔补将其转化为易于处理的凸子问题。

3) 强对偶间隙建立: 利用 S-procedure 建立原问题与对偶问题之间的强对偶间隙,并推导了算法收敛至原问题 KKT 点的条件。

最后,本文采用4个不同节点规模的配电网改进系统进行算例分析,数值优化结果验证了所提方法的可行性与有效性。

1 配电网潮流及优化模型

1.1 潮流模型

为适应下文模型与算法,本节支路潮流模型^[26]中的正方向设定为由负荷节点指向首端电源节点。定义 i 、 t 、 k 、 n 表示节点索引; (i,t) 表示从 i 节点到 t 节点的支路; F_i 为节点 i 的父节点,即从节点 i 指向电源节点方向的上级节点; $S_{(t,i)}$ 表示从 t 节点流向 i 节点的支路复功率; $z_{(t,i)}$ 、 $r_{(t,i)}$ 和 $x_{(t,i)}$ 分别表示支路 (t,i) 的复阻抗、电阻和电抗; s_i 表示 i 节点的注入复功率。系统潮流流向如图1所示。

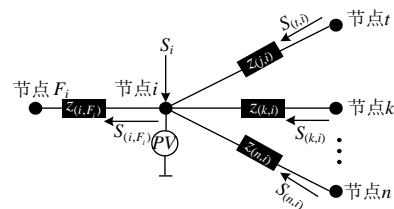


图1 潮流模型示意图

Fig. 1 Schematic diagram of the branch power flow model

由于规定正方向指向电源节点,因此对于辐射状的配电网系统来说,每个节点有唯一的父节点。首端节点为与上级电网相连的电源节点,该节点具有保持节点电压恒定的特性,并可以在系统分布式电源出力不足时适当注入功率以满足系统功率平衡^[27]。系统稳态潮流方程可表示为:

$$S_{(i,F_i)} = \sum_{t \in C_i} (S_{(t,i)} - z_{(t,i)} I_{(t,i)}^2) + s_i \quad (1)$$

$$I_{(i,F_i)} = (V_i - V_{F_i}) / z_{(i,F_i)} \quad (2)$$

$$S_{(i,F_i)} = V_i I_{(i,F_i)}^* \quad (3)$$

式中： C_i 为以 i 为父节点的节点集合； V_i 为节点 i 的复电压； $I_{(t,i)}^*$ 为支路 (t,i) 复电流的共轭。

由于上述模型涉及复数域关系，为便于计算与建模分析，本文将其中的各物理量按实部与虚部分别展开处理，从而将复数约束转化为实数形式的等价表达。令 $v_i = V_i^2$ 、 $l_{(i,F_i)} = I_{(i,F_i)}^2$ ，将原始模型表示为实数域关系，可得出常用的配电网模型。已有研究表明，径向网络可以恢复出相角^[7]：

$$P_{(i,F_i)} = \sum_{t \in C_i} (P_{(t,i)} - r_{(t,i)} l_{(t,i)}) + p_i, \forall i \in N_\theta \quad (4)$$

$$Q_{(i,F_i)} = \sum_{t \in C_i} (Q_{(t,i)} - x_{(t,i)} l_{(t,i)}) + q_i, \forall i \in N_\theta \quad (5)$$

$$v_i - v_{F_i} = 2(r_{(i,F_i)} P_{(i,F_i)} + x_{(i,F_i)} Q_{(i,F_i)}) - (r_{(i,F_i)}^2 + x_{(i,F_i)}^2) l_{(i,F_i)}, \forall i \in N_\theta \quad (6)$$

$$v_i l_{(i,F_i)} = P_{(i,F_i)}^2 + Q_{(i,F_i)}^2, \forall i \in N_\theta \quad (7)$$

$$s_i = s_{i,PV} - s_{i,L} = p_i + j q_i, \forall i \in N_\theta \quad (8)$$

式中： N 与 N_θ 分别为包含电源节点与不包含电源节点的集合； $P_{(i,F_i)}$ 、 $Q_{(i,F_i)}$ 分别为支路 (i,F_i) 的有功功率和无功功率； $r_{(i,F_i)}$ 、 $x_{(i,F_i)}$ 分别为支路 (i,F_i) 的电阻和电抗； p_i 与 q_i 分别为节点 i 的注入有功功率和注入无功功率； $s_{i,PV}$ 与 $s_{i,L}$ 分别为节点 i 的光伏机组实际出力与电负荷； j 为虚部单位。

为保证系统安全运行，节点电压需保持在标么值附近的某一阈值内：

$$\underline{V}_i^2 \leq v_i \leq \bar{V}_i^2, \forall i \in N \quad (9)$$

式中 \bar{V}_i 、 \underline{V}_i 分别为节点 i 电压的上下限。

分布式光伏机组出力范围约束如下：

$$\underline{s}_{i,PV} \leq s_{i,PV} \leq \bar{s}_{i,PV}, \forall i \in N_\theta \quad (10)$$

式中 $\bar{s}_{i,PV}$ 与 $\underline{s}_{i,PV}$ 分别为分布式光伏机组的出力上下限。线路允许流过的电流与功率限制如下：

$$0 \leq l_{(i,F_i)} \leq \bar{l}_{(i,F_i)}, \forall i \in N_\theta \quad (11)$$

$$-\bar{P}_{(i,F_i)} \leq P_{(i,F_i)} \leq \bar{P}_{(i,F_i)}, \forall i \in N_\theta \quad (12)$$

式中 $\bar{l}_{(i,F_i)}$ 、 $\bar{P}_{(i,F_i)}$ 分别为支路 (i,F_i) 允许通过的电流上限与有功功率上限。式(12)左端下限为负表示在辐射状配电网的部分节点加入分布式电源后，可能会产生局部反向潮流。

1.2 目标函数

实际配电网运行中，不同场景需求下有不同的优化目标，为体现SMSOC算法相比于SOCR在适用范围与求解精度上的优势，本文分别使用配电网无功优化与光伏承载力评估模型分析并进行讨论。

1.2.1 配电网无功优化模型

配电网无功优化问题以系统网损为目标^[28-29]，保证系统运行约束条件下，通过优化系统的无功出力使网损最小，其目标函数为

$$\begin{cases} \min & p_{\text{loss}} = \sum_{i=1}^{N_\theta^c} r_{(i,F_i)} l_{(i,F_i)}, \forall i \in N_\theta \\ \text{s.t.} & \text{式(4)—(12)} \end{cases} \quad (13)$$

式中： p_{loss} 为系统网损； N_θ^c 为集合 N_θ 中元素个数。

1.2.2 分布式光伏承载力评估模型

本文提出的光伏承载力评估模型综合考虑分布式光伏并网容量的最大化与网络损耗的最小化，两者差值的最大值定义为分布式光伏承载力，以此为目标函数，通过优化系统的光伏机组出力，使系统分布式光伏承载力达到最大^[30-31]。分布式光伏承载力评估模型的目标函数为

$$\begin{cases} \max & f = \sum_{t \in N_{PV}} p_{t,PV} - p_{\text{loss}} \\ \text{s.t.} & \text{式(4)—(12)} \end{cases} \quad (14)$$

式中： N_{PV} 为配置分布式光伏的节点集合； $p_{t,PV}$ 为节点 t 的机组实际有功出力。可知，问题式(13)和(14)的目标函数是由与支路或节点相关的线性函数叠加而成，为凸函数。式(4)—(6)和(8)—(10)是线性约束，可构成凸集，而式(7)表示的二次约束为非凸约束。

2 适用于辐射状配电网的SMSOC算法

含有非凸约束的优化问题是典型的NP-hard问题，并且求解难度随变量空间增大而急剧上升，为有效应对原问题的非凸性，利用配电网的辐射状特性，本节提出SMSOC算法。通过引入辅助变量的方式将原始非凸问题策略性地分解为上层SOCP问题与下层多个QP1QC子问题；然后将下层的QP1QC子问题转化为等价凸问题，其中，上层模型的每个子问题包含一个凸目标函数和若干线性约束，下层模型的每个子问题包含一个凸目标函数和一个非凸二次约束。上层模型由于其凸性易于求解，而下层模型的子问题是非凸的，为克服此问题，本文利用舒尔补和S-procedure来证明非凸子问题的强对偶性，并推导出非凸子问题的等价对偶形

式。最后，利用 ADMM 建立原始变量和辅助变量之间的共识关系，确保算法有效。

2.1 子问题分解

首先，定义节点 i 原始变量所形成的向量为

$$\mathbf{y}_i = [P_{y,(i,F_i)}, Q_{y,(i,F_i)}, v_{y,i}, l_{y,(i,F_i)}, P_{y,i}, q_{y,i}] \quad (15)$$

式中： $P_{y,(i,F_i)}, Q_{y,(i,F_i)}, v_{y,i}, l_{y,(i,F_i)}, P_{y,i}, q_{y,i}$ 均为向量 \mathbf{y}_i 中的分量，也被称为(上层)原始变量。对于式(14)，可视作由各节点的原始变量经过线性组合所得。为分离式(14)为上下两层，定义节点 i 辅助变量所形成向量为

$$\mathbf{x}_i = [P_{x,(i,F_i)}, Q_{x,(i,F_i)}, v_{x,i}, l_{x,(i,F_i)}, P_{x,i}, q_{x,i}] \quad (16)$$

式中 $P_{x,(i,F_i)}, Q_{x,(i,F_i)}, v_{x,i}, l_{x,(i,F_i)}, P_{x,i}, q_{x,i}$ 均为向量 \mathbf{x}_i 的分量，也被称为(下层)辅助变量。由此，上下层模型可以根据原始变量与辅助变量进行解耦。

其次，将式(14)中唯一的非凸二次等式约束式(7)等效表示为：

$$v_{y,i} l_{y,(i,F_i)} \geq P_{y,(i,F_i)}^2 + Q_{y,(i,F_i)}^2, i \in N_\theta \quad (17)$$

$$v_{x,i} l_{x,(i,F_i)} \leq P_{x,(i,F_i)}^2 + Q_{x,(i,F_i)}^2, i \in N_\theta \quad (18)$$

式(17)形成的可行域可转换为二阶锥，是凸集，而式(18)是非凸的。对节点 i ，上层模型所形成的凸可行域与下层模型所形成的非凸可行域分别为：

$$Y_i = \begin{cases} P_{y,(i,F_i)} = \sum_{t \in C_i} (P_{y,(t,i)} - r_{(t,i)} l_{y,(t,i)}) + p_{y,i} \\ Q_{y,(i,F_i)} = \sum_{t \in C_i} (Q_{y,(t,i)} - x_{(t,i)} l_{y,(t,i)}) + q_{y,i} \\ v_{y,i} - v_{y,F_i} = 2(r_{(i,F_i)} P_{y,(i,F_i)} + x_{(i,F_i)} Q_{y,(i,F_i)}) - (r_{(i,F_i)}^2 + x_{(i,F_i)}^2) l_{y,(i,F_i)} \\ v_{y,i} l_{y,(i,F_i)} \geq P_{y,(i,F_i)}^2 + Q_{y,(i,F_i)}^2 \end{cases} \quad (19)$$

$$X_i = \{v_{x,i} l_{x,(i,F_i)} \leq (P_{x,(i,F_i)})^2 + (Q_{x,(i,F_i)})^2\} \quad (20)$$

式中 Y_i, X_i 分别为 i 节点上、下层模型的可行域。下层模型各节点之间彼此独立，可并行计算。但须在原始变量和辅助变量之间建立共识约束，以确保模型的有效性。为此，将式(14)重写为 P_1 ：

$$P_1: \begin{cases} \max_{x_i \in X_i, y_i \in Y_i} \sum_{i \in N_\theta} f(x_i) \\ \text{s.t.} \begin{cases} P_{y,(i,F_i)} = P_{x,(i,F_i)} \\ Q_{y,(i,F_i)} = Q_{x,(i,F_i)} \\ v_{y,i} = v_{x,i} \\ l_{y,(i,F_i)} = l_{x,(i,F_i)} \\ P_{y,i} = P_{x,i} \\ q_{y,i} = q_{x,i} \end{cases} \end{cases} \quad (21)$$

将以上共识约束写为 $\mathbf{M}\mathbf{x}_i = \mathbf{N}\mathbf{y}_i$ ，其中 \mathbf{M}, \mathbf{N} 分别为 $\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i$ 的系数矩阵。 P_1 问题的增广拉格朗日形

式为

$$L_\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i \in N_\theta} -f(x_i) + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{M}\mathbf{x}_i - \mathbf{N}\mathbf{y}_i) + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{M}\mathbf{x}_i - \mathbf{N}\mathbf{y}_i\|_2^2 \quad (22)$$

式中： $\boldsymbol{\lambda}$ 为拉格朗日乘子向量； $(\cdot)^T$ 表示向量或矩阵 (\cdot) 的转置； ρ 为惩罚因子，通常取适当大的正数。对于任意节点 i ，可按如下顺序分别求得下层、上层变量、拉格朗日乘子和每次迭代后的原始残差：

$$SP_1: \mathbf{y}_i^{k+1} = \arg \min_{y_i \in Y_i} L_\rho(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}, \boldsymbol{\lambda}^k) \quad (23)$$

$$SP_2: \mathbf{x}_i^{k+1} = \arg \min_{x_i \in X_i} L_\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}^{k+1}, \boldsymbol{\lambda}^k) \quad (24)$$

$$SP_3: \boldsymbol{\lambda}_i^{k+1} = \boldsymbol{\lambda}_i^k + \rho(\mathbf{M}\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{N}\mathbf{y}^{k+1}) \quad (25)$$

$$\mathbf{r}^{k+1} = \|\mathbf{M}\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{N}\mathbf{y}^{k+1}\|_2 \quad (26)$$

式中： k 为迭代次数； \mathbf{r}^{k+1} 为第 $k+1$ 次迭代后的残差； $\|(\cdot)\|_2$ 为 (\cdot) 的二范数。求得 y 分量值后，与下层模型中对应的节点交换分量值，计算得到 x 分量，并更新拉格朗日乘子，计算原始残差。重复此过程，直至残差小于给定的可信阈值。整个信息交换的过程如图 2 所示。

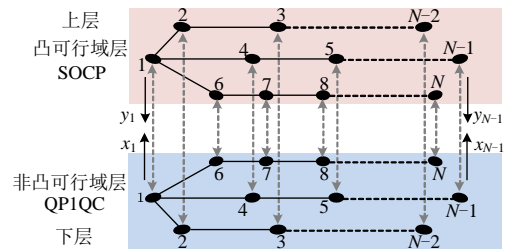


图 2 信息交换过程示意图

Fig. 2 Schematic diagram of the information exchange

2.2 消除子问题的非凸性

当惩罚因子严格为正且 x 子问题 SP_1 与 y 子问题 SP_2 均为凸时，收敛性可以得到保证。可知， y 子问题式(23)具有凸可行域与凸目标函数， x 子问题式(24)由于具有非凸可行域而非凸。因此，应用 ADMM 的思想求解当前 SP_1 和 SP_2 问题并不能保证严格收敛，为解决这个问题，本节引入消除这种非凸性的理论，将原非凸子问题 SP_2 重写为

$$P_{U1}: \begin{cases} \min \frac{1}{2} \mathbf{x}_i^T (\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i) \mathbf{x}_i + (\mathbf{C}_i)^T \mathbf{x}_i \\ \text{s.t.} \frac{1}{2} \mathbf{x}_i^T \mathbf{M}_i \mathbf{x}_i \leq 0 \\ \mathbf{M}_i = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (27)$$

式中： \mathbf{A}_i 为式(24)中原目标函数 $f(\mathbf{x}_i)$ 关于变量 x 的二次项系数，在线性目标函数下为 6×6 的零矩阵； \mathbf{B}_i 为式(24)中增广拉格朗日项关于变量 x 的二次项系数，其表达如式(28)所示； \mathbf{C}_i 为线性项系数，与上次迭代的 \mathbf{y}_i 分量值有关，在计算 x 分量的步骤下可认为是常数，保持不变； \mathbf{M}_i 为关于 \mathbf{x}_i 分量的非凸约束系数矩阵。

$$\mathbf{B}_i = -\frac{\rho}{2}\mathbf{E} \quad (28)$$

式中 \mathbf{E} 为 6×6 的单位矩阵。由于约束条件的系数矩阵 \mathbf{C}_i 不是半正定的，所定义的可行域非凸，但由于每个节点仅包含一个非凸二次约束， P_{U1} 是典型的 QP1QC 问题，对这类特殊问题，即使约束条件非凸，也可通过转换与推导而求解^[25]。为此，引入舒尔补和 S-procedure 来建立 P_{U1} 与对偶问题之间的强对偶性。 P_{U1} 问题的对偶形式如下：

$g_{U1}(\nu_i)$:

$$\max_{\mathbf{x}_i} \frac{1}{2} \mathbf{x}_i^T (\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i) \mathbf{x}_i + (\mathbf{C}_i)^T \mathbf{x}_i + \nu_i \left(\frac{1}{2} \mathbf{x}_i^T \mathbf{M}_i \mathbf{x}_i \right) \quad (29)$$

式中 ν_i 为问题 P_{U1} 中二次不等式约束的对偶变量。利用一阶最优性条件可以将 \mathbf{x}_i 表示为

$$\mathbf{x}_i = -(\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i + \nu_i \mathbf{M}_i)^{-1} \mathbf{C}_i \quad (30)$$

式中 $(\cdot)^{-1}$ 表示矩阵 (\cdot) 的逆。将式(30)代入式(29)，可得出对偶问题：

$$D_{U1} : \max_{\nu_i} -\frac{1}{2} (\mathbf{C}_i)^T (\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i + \nu_i \mathbf{M}_i)^{-1} \mathbf{C}_i \quad (31)$$

$$\nu_i \geq 0 \quad (32)$$

$$\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i + \nu_i \mathbf{M}_i \succeq \mathbf{0} \quad (33)$$

其中，式(32)可确保对偶变量有意义，式(33)可确保问题存在有穷解。利用舒尔补，可以将对偶问题 D_{U1} 表示为凸半定规划形式^[20]：

$$S_{U1} : \max_{\nu_i, \gamma_i} \gamma_i \quad (34)$$

$$\nu_i \geq 0 \quad (35)$$

$$\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i + \nu_i \mathbf{M}_i \succeq \mathbf{0} \quad (36)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i + \nu_i \mathbf{M}_i & \mathbf{C}_i \\ (\mathbf{C}_i)^T & -\gamma_i \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0} \quad (37)$$

由式(36)可知，对偶问题总是凸的，因此对于任意原问题 P_{U1} 总是可以通过求解 S_{U1} 来获得一个解，但该解并不总是与 P_{U1} 的解相等，只有当强对偶性成立时，才具有相同的解。因此引入控制领域的理论^[32]，通过 S-procedure 推导定理 1。

定理 1：当问题 P_{U1} 的约束集合非空时， P_{U1} 与 S_{U1} 的强对偶性成立，即 P_{U1} 与 S_{U1} 的最优解相等。

证明：参考标准的 S-procedure 形式，根据 QP1QC 问题的参数约束式(37)可得标准的半定约束：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i & \mathbf{C}_i \\ (\mathbf{C}_i)^T & D_{0,i} - \gamma_i \end{bmatrix} + \nu_i \begin{bmatrix} \mathbf{M}_i & 0 \\ 0 & D_{1,i} \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0} \quad (38)$$

式中 $D_{0,i}$ 、 $D_{1,i}$ 分别为目标函数与二次约束的常数项。式(38)是 S_{U1} 问题的等效对偶。根据 S-procedure 理论，对于 QP1QC 问题，当存在 $\nu_i \geq 0$ 使得上述关系成立时，原问题与对偶问题的强对偶性成立。因此，问题 P_{U1} 的解与 S_{U1} 同解。

2.3 收敛性分析与证明

对 2.2 节迭代更新过程中每个节点的收敛性情况进行深入分析。证明在满足以下两个收敛准则之一时，系统能够收敛到原问题式(14)的 KKT 点。为此，给出如下定理 2。

定理 2：当以下两个收敛准则中的任意一个成立时，单个节点主体子问题的最优解将收敛到原问题的 KKT 点。

准则 1: $\mathbf{x}_i^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \mathbf{y}_i^k, \forall i \in N_\theta$

准则 2: $\lambda_i^{k+1} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \lambda_i^k, \forall i \in N_\theta$

证明：按 x 分量可将原问题 f 重写为二次规划形式：

$$\begin{cases} \min_x \sum_{i \in N_\theta} \left(\frac{1}{2} \mathbf{x}_i^T \mathbf{A}_{0,i} \mathbf{x}_i + (\mathbf{C}_i)^T \mathbf{x}_i \right) \\ \text{s.t.} : \frac{1}{2} \mathbf{x}_i^T \mathbf{Q}_{2,i}^m \mathbf{x}_i + (\mathbf{Q}_{1,i}^m)^T \mathbf{x}_i \leq 0 \\ \frac{1}{2} \mathbf{x}_i^T \mathbf{N}_{2,i} \mathbf{x}_i + (\mathbf{N}_{1,i})^T \mathbf{x}_i = 0 \\ \frac{1}{2} \mathbf{x}_i^T \mathbf{W}_{2,i}^m \mathbf{x}_i + (\mathbf{W}_{1,i}^m)^T \mathbf{x}_i = 0 \\ \forall i \in N_\theta, \forall m \in m_i \end{cases} \quad (39)$$

式中： m 为 i 节点约束个数的索引； m_i 为 i 节点所有的约束集合； $\mathbf{A}_{0,i}$ 为 i 节点原目标函数中的二次项系数，有 $\mathbf{A}_{0,i} = \mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i$ ； $\mathbf{Q}_{2,i}^m$ 、 $\mathbf{Q}_{1,i}^m$ 分别为 i 节点的第 m 个不等式约束的二次项和线性项系数矩阵； $\mathbf{N}_{2,i}$ 、 $\mathbf{N}_{1,i}$ 分别为 i 节点唯一非凸约束的二次项和线性项系数矩阵； $\mathbf{W}_{2,i}^m$ 、 $\mathbf{W}_{1,i}^m$ 分别为 i 节点除非凸约束外第 m 个等式约束的二次项和线性项系数矩阵。当以上某约束为线性(不)等式时，对应的二次项系数矩阵为零矩阵。式(39)的对偶形式为

$$L_f = \sum_{i \in N_\theta} \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{x}_i^T [\mathbf{A}_{0,i} + \sum_{m \in m_i} (\mathbf{h}_i^m \mathbf{Q}_{2,i}^m + \mathbf{r}_i^m \mathbf{W}_{2,i}^m) + d_i \mathbf{N}_{2,i}] \mathbf{x}_i + [\mathbf{C}_i + \sum_{m \in m_i} (\mathbf{h}_i^m \mathbf{Q}_{1,i}^m + \mathbf{r}_i^m \mathbf{W}_{1,i}^m) + d_i \mathbf{N}_{1,i}]^T \mathbf{x}_i \right\} \quad (40)$$

式中 \mathbf{h}_i^m 、 \mathbf{r}_i^m 、 d_i 分别为不等式、凸等式和非凸等式约束的对偶变量。该问题的 KKT 条件如下:

一阶最优性条件:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{A}_{0,i} + \sum_{m \in m_i} (\mathbf{h}_i^{m*} \mathbf{Q}_{2,i}^m + \mathbf{r}_i^{m*} \mathbf{W}_{2,i}^m) + d_i^* \mathbf{N}_{2,i}) \mathbf{x}_i + \\ & (\mathbf{C}_i + \sum_{m \in m_i} (\mathbf{h}_i^{m*} \mathbf{Q}_{1,i}^m + \mathbf{r}_i^{m*} \mathbf{W}_{1,i}^m) + d_i^* \mathbf{N}_{1,i}) = 0, \\ & \forall i \in N_\theta, \forall m \in m_i \end{aligned} \quad (41)$$

原始可行性:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \mathbf{x}_i^T \mathbf{Q}_{2,i}^m \mathbf{x}_i + (\mathbf{Q}_{1,i}^m)^T \mathbf{x}_i \leq 0 \\ \frac{1}{2} \mathbf{x}_i^T \mathbf{N}_{2,i} \mathbf{x}_i + (\mathbf{N}_{1,i})^T \mathbf{x}_i = 0 \\ \frac{1}{2} \mathbf{x}_i^T \mathbf{W}_{2,i}^m \mathbf{x}_i + (\mathbf{W}_{1,i}^m)^T \mathbf{x}_i = 0, \forall i \in N_\theta, \forall m \in m_i \end{cases} \quad (42)$$

对偶可行性:

$$\mathbf{h}_i^{m*} \geq 0; \mathbf{r}_i^{m*} \in \mathbf{R}; d_i^* \in \mathbf{R}, \forall i \in N_\theta, \forall m \in m_i \quad (43)$$

互补松弛条件:

$$\mathbf{h}_i^{m*} \cdot \left(\frac{1}{2} (\mathbf{x}_i^*)^T \mathbf{Q}_{2,i}^m \mathbf{x}_i^* + (\mathbf{Q}_{1,i}^m)^T \mathbf{x}_i^* \right) = 0 \quad (44)$$

式中: \mathbf{x}_i^* 为原始最优变量; \mathbf{h}_i^{m*} 、 \mathbf{r}_i^{m*} 、 d_i^* 分别为 i 节点关于不等式约束、凸等式约束和非凸等式约束的对偶最优变量。SP₁ 与 SP₂ 的一阶最优性条件分别为:

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}_{0,i} \mathbf{x}_i + \mathbf{C}_i + \rho(\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i) + \boldsymbol{\lambda}_i + d_i \mathbf{N}_{2,i} \mathbf{x}_i + \\ & d_i \mathbf{N}_{1,i} = 0, \forall i \in N_\theta \end{aligned} \quad (45)$$

$$-\rho(\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i) - \boldsymbol{\lambda}_i + \sum_{m \in m_i} [(\mathbf{h}_i^m \mathbf{Q}_{2,i}^m + \mathbf{r}_i^m \mathbf{W}_{2,i}^m) \mathbf{x}_i + \mathbf{h}_i^m \mathbf{Q}_{1,i}^m + \mathbf{r}_i^m \mathbf{W}_{1,i}^m] = 0, \forall i \in N_\theta \quad (46)$$

式中 $\boldsymbol{\lambda}_i$ 为式(22)中各拉格朗日乘子所组成的向量。结合拉格朗日乘子的更新式(25)可知, 当定理 2 中的任意一个准则满足时, 另一个条件也将自动满足。因此, 当 k 趋于无穷时, 式(45)中的第三项与式(46)的第一项都将趋于零。可得:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}_i = \sum_{m \in m_i} [(\mathbf{h}_i^m \mathbf{Q}_{2,i}^m + \mathbf{r}_i^m \mathbf{W}_{2,i}^m) \mathbf{x}_i + \mathbf{h}_i^m \mathbf{Q}_{1,i}^m + \\ \mathbf{r}_i^m \mathbf{W}_{1,i}^m], \forall i \in N_\theta \end{aligned} \quad (47)$$

将式(47)代入式(45), 并将其中线性项与常数项

分别合并, 可恢复原问题的一阶最优性条件式(41)。并且, 由于在 \mathbf{x} 、 \mathbf{y} 变量之间具有共识约束, 因此分解过程也满足原始可行性、对偶可行性以及互补松弛条件。即算法收敛后, 单个节点子问题的最优解将收敛到原问题的 KKT 点。

通过上述的变换与证明, 对传统二阶锥优化模型进行序列修正, 可以获得允许误差下精确的优化解。本文所提的 SMSOC 上下层协调优化算法流程如图 3 所示。

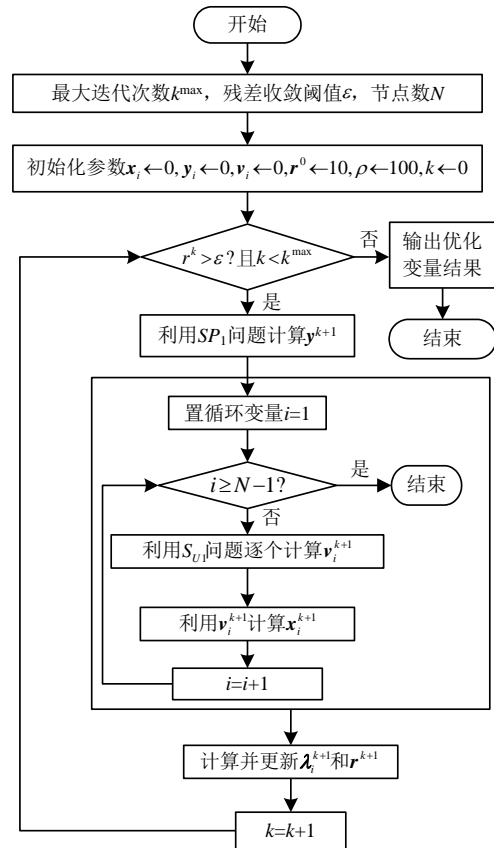


图 3 SMSOC 优化算法流程

Fig. 3 Process of the SMSOC optimization algorithm

3 算例分析

本文采用改进的 IEEE 33、69、136 节点配电系统和中国冀北地区某县屋顶分布式光伏试点的 50 节点 10 kV 系统进行分析。所有数值结果均在 Intel(R) Core(TM) i7-8700 CPU@3.20 GHz, 64 GB 内存的计算机上进行。上、下层模型分别通过商业求解器 GUROBI 11.0.2 和 Mosek 10.1 求解获得。

3.1 数据准备

本文算例所用到的改进测试系统和 50 节点实际系统原始数据来自于文献[33-34], 参见附录。对 4 个规模不同配电系统分别在不同节点安装光伏机组, 机组位置与容量信息如表 1 所示。

表 1 光伏机组配置信息

Table 1 PV units configuration information

系统规模	光伏机组安装节点	单台机组容量/MW
33 节点	6、20、25、30、33	5
50 节点	8、14、20、24、32、36、39、44、49	5
69 节点	11、21、27、33、39、46、49、59、65	5
136 节点	7、14、23、29、33、44、49、53、62、67、80、84、95、102、108、117、134	8

3.2 无功优化结果

为验证本文方法的可行性与有效性，首先选取文献[35]已经证明 SOCR 下精确的典型场景，即无功优化模型中以线损最小为目标。以改进的 IEEE 33 节点配电系统和冀北地区 50 节点配电系统为例，SOCR、SDR 与 SMSOC 算法下光伏机组出力、系统线损的数值结果如表 2、3 所示。其中，1 号节点的出力为上级电网的注入功率。

表 2 各个机组实际出力情况

Table 2 The actual output of units

系统规模	机组节点号	SOCR 出力/MW	SDR 出力/MW	SMSOC 出力/MW
改进的 33 节点系统	1	0.4276	0.4264	0.4298
	6	1.3647	1.3647	1.3646
	20	0.1779	0.1791	0.1772
	22	0.1226	0.1227	0.1219
	25	0.7668	0.7669	0.7662
	30	0.4497	0.4496	0.4499
50 节点实际系统	33	0.3158	0.3158	0.3155
	1	0.6335	0.6332	0.6301
	8	0.9774	0.9774	0.9768
	14	0.7026	0.7026	0.7026
	20	0.7135	0.7135	0.7134
	24	0.2604	0.2608	0.2641
	32	0.4669	0.4669	0.4667
	36	0.5999	0.5997	0.6012
	39	0.2939	0.2940	0.2931
	44	0.2960	0.2961	0.2957
	49	0.8251	0.8251	0.8256

表 3 光伏总出力与系统线损

Table 3 Total PV output and system power loss

系统规模	方法	光伏总出力/MW	系统线损/kW
改进的 33 节点系统	SOCR	3.1976	10.1361
	SDR	3.1988	10.1360
	SMSOC	3.1953	10.1378
50 节点实际系统	SOCR	5.1357	18.1978
	SDR	5.1360	18.1978
	SMSOC	5.1391	18.2015

由表 2、3 可知，在标准系统与实际系统中，线损均可保证在 10^{-5} 以内结果基本一致，光伏机组出力也基本一致，表明 3 种方法下的潮流分布相同。此外，在无功优化时，SMSOC 算法仅需一次迭代系统残差便可收敛到 10^{-8} ，表明该场景下 SOCR 与

SDR 均是精确的，上层模型求解完毕后已经达到了最优解，下层无需修正。由此说明本文所提 SMSOC 算法的可行性满足工程要求。

3.3 光伏承载力评估结果

本节沿用 3.1 节中的参数，以光伏承载力最大为目标，分别采用 SOCR、SDR 和 SMSOC 算法对改进的 33 节点系统和冀北地区 50 节点配电系统进行分析，并计算二者优化结果的误差。其中 33 节点系统在 3 种方法下优化所得系统潮流结果如附表 A1、A2 和 A3 所示，所得光伏机组实际出力与系统线损如表 4、5 所示。可知，在两个系统中，两种方法优化所得的目标函数值虽然一致，但光伏出力与系统线损差异明显。此时，SOCR 和 SDR 技术只能考虑整体目标函数，而忽略了系统实际要求，松弛后的可行域并不精确，虽然系统光伏出力达到最大，但系统线损也达到了最大，在改进的 33 节点系统中，SOCR 和 SDR 的结果中线损分别达到了光伏出力的 73.48% 和 71.21%；而在 50 节点实际系统中线损更是分别达到了光伏出力的 81.74% 和 81.34%。显然，此时的结果并非系统的实际可行解。

表 4 系统光伏机组出力

Table 4 The PV output power of system

系统	机组	SOCR 出力/MW	SDR 出力/MW	SMSOC 出力/MW
改进的 33 节点系统	6	0.8571	4.2545	0.6073
	20	2.7469	2.6693	0.6874
	22	1.8587	1.3381	0.6530
	25	4.2232	2.0006	1.2703
	30	0.2793	1.2009	0.5250
	33	3.6644	1.0913	0.3302
50 节点实际系统	8	2.6260	3.3910	0.8129
	14	2.0419	5.2101	0.7473
	20	4.9542	4.2349	0.8752
	24	4.8587	3.7351	0.9943
	32	2.1027	2.5377	0.5321
	36	4.8667	3.9183	0.6366
	39	1.9770	2.3765	0.6497
	44	3.1525	3.2307	0.6377
	49	4.9140	2.1848	0.7715

表 5 系统线损与目标函数值

Table 5 System power loss and objective function value

系统规模	方法	光伏总出力/MW	系统线损/MW	目标值/MW
改进的 33 节点系统	SOCR	13.6296	10.0146	3.6150
	SDR	12.5547	8.9397	3.6150
	SMSOC	4.0733	0.4583	3.6150
50 节点实际系统	SOCR	31.4936	25.7426	5.7510
	SDR	30.8192	25.0682	5.7510
	SMSOC	6.6573	0.9063	5.7510

为体现本文所提 SMSOC 算法的精确性, 将 3 种方法优化所得潮流结果分别代入式(7)左、右两端进行计算, 并定义绝对误差 Δ 与相对误差 $\Delta\%$, 其计算方式如式(48)和(49)所示。分别使用 SOCR、SDR 和 SMSOC 算法对 IEEE 33 节点和冀北地区 50 节点系统进行分析, 误差如图 4—9 所示。

$$\Delta = \sum_{i \in N_{\theta}} |P_{(i,F_i)}^2 + Q_{(i,F_i)}^2 - v_i l_{(i,F_i)}| \quad (48)$$

$$\Delta\% = \frac{\sum_{i \in N_{\theta}} |P_{(i,F_i)}^2 + Q_{(i,F_i)}^2 - v_i l_{(i,F_i)}|}{\sum_{i \in N_{\theta}} |v_i l_{(i,F_i)}|} \times 100\% \quad (49)$$

由图 4、5、7 和 8 可知, SOCR 与 SDR 的计算结果在式(7)两端产生了较大误差。其中, 在改进的 33 节点系统中, SOCR 技术计算结果在 3、4、5、10 等支路最大出现了超过 70% 的相对误差, 相对误

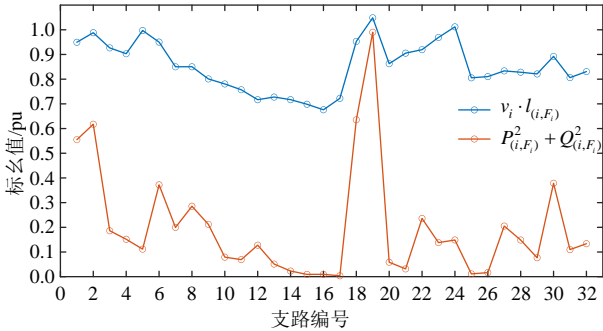


图 4 SOCR 下 33 节点系统非凸等式约束误差

Fig. 4 Branch error under SOCR in 33 node system

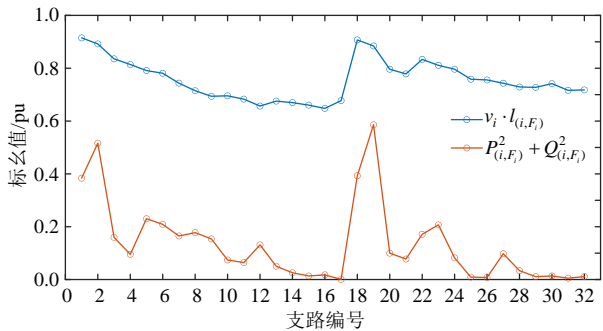


图 5 SDR 下 33 节点系统非凸等式约束误差

Fig. 5 Branch error under SDR in 33 node system

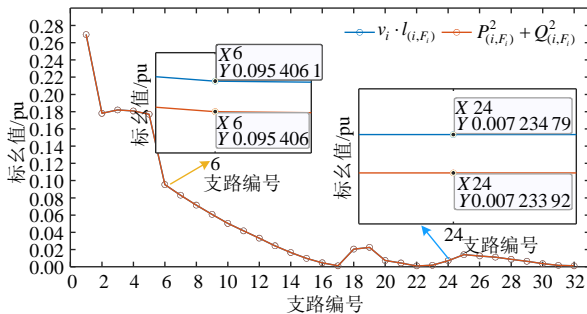


图 6 SMSOC 算法下 33 节点系统非凸等式约束误差

Fig. 6 Branch error under SMSOC in 33 node system

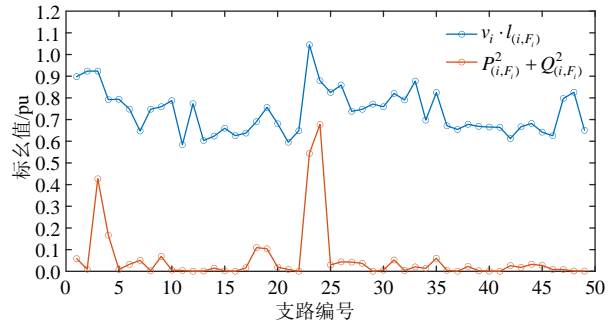


图 7 SOCR 下 50 节点非凸等式约束误差

Fig. 7 Branch error under SOCR in 50 node system

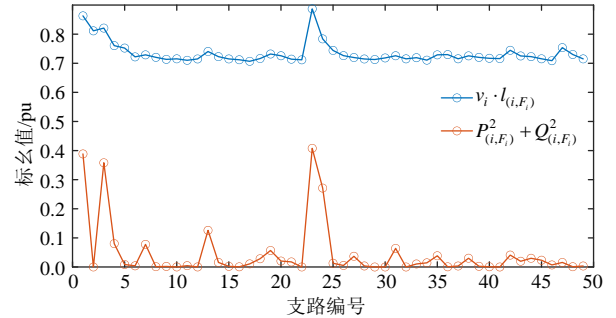


图 8 SDR 下 50 节点系统非凸等式约束误差

Fig. 8 Branch error under SDR in 50 node system

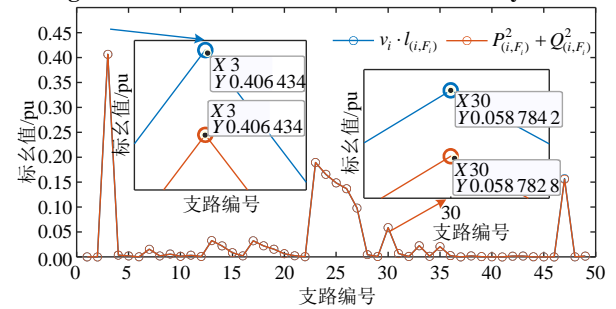


图 9 SMSOC 算法下 50 节点系统非凸等式约束误差

Fig. 9 Branch error under SMSOC in 50 node system

差最小的 19 号支路也超过 5%, SDR 技术计算结果在 14、15、16 等支路处误差最大超过了 90%; 在冀北地区 50 节点实际系统中误差更大, SOCR 与 SDR 技术下, 绝大多数支路误差超过了 90%, 误差最小的 23 号支路也达到了 22.94%。由此结果可知, 此时两个系统的变量优化值均不是系统的可行解。反观 SMSOC 算法的计算结果, 由图 6、9 可知, 无论是改进的 33 节点标准测试系统还是冀北地区 50 节点实际工程系统, 针对系统中任意一条输电支路, 非凸约束式(7)两端的关键变量计算结果曲线均呈现出高度的一致性, 几乎完全重合, 直观反映了算法对约束条件的精准满足能力。分别选取 33 节点系统的 6、24 号支路和 50 节点实际系统的 3、30 号支路作为典型案例, 将其计算结果放大 10^7 倍后可见, 二者在 10^{-5} 的数量级以内完全一致, 这表明 SMSOC 算法可确保式(7)严格相等, 此时决策变量

的优化值为系统实际可行解。

为进一步体现误差结果在不同规模系统中的差异，对改进的 IEEE 33、69、136 节点系统和冀北地区 50 节点实际系统分别使用 3 种方法计算，所得误差如表 6 所示。可知，在光伏承载力评估中，SOCR 与 SDR 技术均不精确，优化结果在式(7)左右两端产生了不可忽略的误差，即使在规模最小的 33 节点系统相对误差也达到了 76%，并且随着系统规模增加，误差值不断增大。而 SMSOC 算法通过上下层模型迭代求解，反复修正上层模型，从本质上来说，当 SMSOC 协调优化算法收敛时，模型没有进行任何松弛，始终可以保证非凸二次等式约束严格成立，避免了凸松弛所带来的误差，因此所得结果正确且可行，即使在系统规模最大的 136 节点系统中，相对误差也可以保证在 0.0001 内，几乎可以保证式(7)零误差，完全可满足工程精度要求。

表 6 不同规模节点系统计算误差

Table 6 Calculation error of different system scales

系统	方法	绝对误差/pu	相对误差/%
改进的 33 节点系统	SOCR	20.929 6	76.63
	SDR	19.971 7	82.37
	SMSOC	5.0996×10^{-5}	0
50 节点实际系统	SOCR	33.242 2	92.24
	SDR	33.729 9	93.75
	SMSOC	4.7382×10^{-6}	0
改进的 69 节点系统	SOCR	51.053 4	83.76
	SDR	43.288 9	83.89
	SMSOC	3.7639×10^{-4}	0.0205
改进 136 节点系统	SOCR	95.758 6	81.35
	SDR	84.438 6	85.60
	SMSOC	0.002666 6	0.049 1

3.4 算法收敛性分析

本节对算法收敛特性与计算时间进行分析。首先，对改进的 IEEE 33、69、136 节点系统和冀北地区 50 节点实际系统残差达到可接受收敛阈值所需的迭代次数进行评估，固定惩罚因子为 100，迭代起始残差为 10，各变量拉格朗日乘子初始化为 0，最大迭代次数为 30 次，收敛过程如图 10 所示。

由图 10 可知，对于改进的 33 与 136 节点配电系统，迭代过程中系统残差整体呈现出略有上升然后快速下降，最后逐渐趋于平缓，直至达到给定精度。在最大迭代次数为 30 的情况下，改进的 33 节点系统最先收敛到 10^{-8} ；随着节点规模的上升，迭代次数也有所增加，最终所能达到的系统残差也相对变大。这是由于整个系统残差是由各节点的残差求和得出，当节点规模增加时，整个系统的残差也

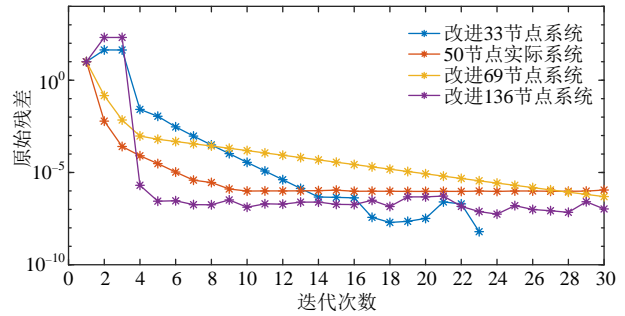


图 10 不同规模系统残差收敛过程

Fig. 10 Convergence process of different system scales

会按节点数目增加，协调计算达到最优解的过程也相对复杂，因此所需迭代次数上升，最终收敛到的残差阈值也更大。而对于改进的 69 节点系统和冀北地区 50 节点实际系统，系统残差直接下降并逐渐达到收敛，与前两个系统的差异主要是由于系统负荷大小不同而引起的，69 节点系统与 50 节点系统整体负荷较小，初始协调优化时的不匹配程度相对较小，因此系统残差在按照各节点求和后的初始残差也相对较小。值得注意的是，对 136 节点系统来说，在迭代 5 次时已经达到较高精度，并且已趋于收敛极限。这主要是因为刚开始进行协调优化时，该系统节点数最多，前几次协调优化的残差也最大，随着迭代次数上升，在惩罚因子作用下系统上下层变量之间快速达成共识并逐渐趋于最优解，因此系统残差急剧下降，这种下降趋势在节点规模越大的系统表现越突出。对于一般工程应用问题，经过 5 次迭代，系统最大残差收敛到 10^{-6} 左右，已完全可以满足工程精度要求，且残差可稳定在该值附近，进一步体现了算法良好的收敛性与稳定性。

其次，为体现 SMSOC 算法相比于文献[24]所提的分布式配电网协调(decentralized distribution network coordination, DDNC)算法优势，对上文的 4 个系统分别进行测试验证，所得系统误差与计算时间如表 7 所示。从系统误差的角度看，两种算法均能保证绝对误差不大于 0.01，但整体仍会呈现出 SMSOC 算法误差数量级相对 DDNC 算法的误差更小，这主要是由于 DDNC 算法考虑了相邻节点之间的交互变量，导致每个节点的残差求和项增多，因此在达到相同的残差收敛阈值后，其系统整体误差要比 SMSOC 误差略大。从计算时间的角度看，本文所提 SMSOC 算法在计算时间上整体要比 DDNC 算法的计算时间短，在改进的 33 节点系统、50 节点实际系统、69 节点系统和 136 节点系统中，SMSOC 算法相比于 DDNC 算法的计算时间分别缩

短了 2.05、4.71、1.51 和 2.13 倍左右。这是由于 DDNC 算法引入了许多相邻节点间的交互变量，增加了迭代过程中的计算量；另一方面，该算法受相邻节点之间交互变量的影响，对各节点子问题计算有顺序要求，限制各子问题必须按节点拓扑排布顺序有序计算，导致计算时间上升，而 SMSOC 的各子问题相互独立，可并行计算，因此在保证计算精度的同时，有效提升了计算效率。

表 7 不同方法下的误差与计算时间

Table 7 Errors and time under different methods

系统	方法	绝对误差/pu	计算时间/s
改进的 33 节点系统	SMSOC	5.0996×10^{-5}	30.464 650
	DDNC	1.5293×10^{-4}	62.503 746
50 节点实际系统	SMSOC	4.7382×10^{-6}	25.018 774
	DDNC	3.4129×10^{-4}	117.912 667
改进的 69 节点系统	SMSOC	3.7639×10^{-5}	105.964 158
	DDNC	2.0533×10^{-4}	159.923 102
改进 136 节点系统	SMSOC	0.002 666 6	144.437 906
	DDNC	0.002 7	306.552 059

最后，对不同负荷水平的收敛性进行评估。对改进的 IEEE 33 节点系统和冀北地区 50 节点实际系统在 5 组不同负荷水平下残差达到 10^{-6} 所需迭代次数进行分析，结果如图 11、12 所示。可知，对于 5 组不同负荷水平下的改进 33 节点系统和 50 节

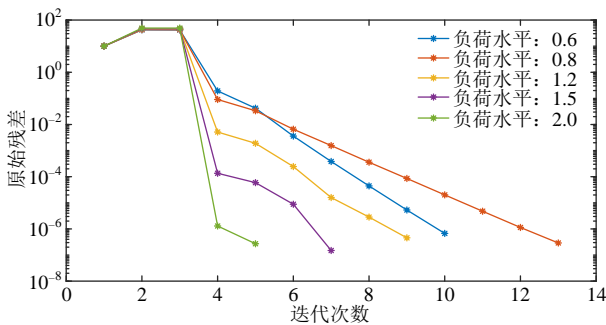


图 11 改进 33 节点系统不同负荷水平收敛过程

Fig. 11 Convergence process under different load levels of 33-node system

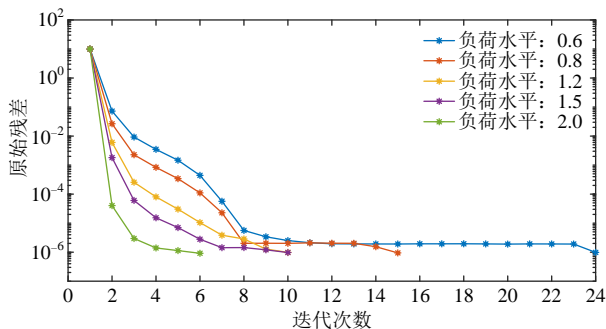


图 12 50 节点实际系统不同负荷水平收敛过程

Fig. 12 Convergence process under different load levels of 50-node system

点实际系统，分别在 15 和 25 次以内收敛，并且随着负荷水平增加，系统整体收敛速度加快，迭代次数更少，这表明在系统重载的情况下，只要线路上通过的电流与功率在安全范围内，系统也可以在短时间内收敛到合理的精度范围。进一步，在算法收敛后，对不同负荷水平下的非凸二次等式约束绝对误差与相对误差进行分析，所得结果如表 8 所示。在 5 种不同负荷水平下，改进的 33 节点测试系统与 50 节点实际系统均可达到足够小的相对误差，并且随着负荷水平的上升，误差值会有所增加，但最大负荷水平下的误差与相对误差比例均在可接受范围内。综上，SMSOC 算法相对来说精度高、适用范围广，可完全满足工程需求。

表 8 不同负荷水平下系统误差值

Table 8 Systematic error values at different load levels

系统	负荷水平/%	绝对误差/pu	相对误差比例/%
改进的 33 节点系统	60	4.4472×10^{-5}	0.002 58
	80	6.9163×10^{-5}	0.004 2
	120	2.4293×10^{-4}	0.015 5
	150	1.4633×10^{-4}	0.009 6
	200	0.001 6	0.104 7
50 节点实际系统	60	0.000 19	0.012
	80	0.000 23	0.014
	120	0.000 27	0.017
	150	0.000 29	0.018
	200	0.000 33	0.020

4 结论

本文针对辐射状配电网二阶锥松弛在高比例新能源场景下不精确的问题，提出了序列修正二阶锥(SMSOC)化方法。其主要创新体现在：

1) 将原非凸二次等式约束构造成上下层迭代求解框架，使松弛模型能够在序列修正中逐步逼近真实可行域。

2) 利用舒尔补将子问题转化为 SDP 对偶形式，从而提升模型的可处理性与稳定性。

3) 基于 S-procedure 推导 SMSOC 收敛至原问题 KKT 点的判据，并建立相应收敛性理论。仿真结果显示：SMSOC 能有效避免 SOCR 与 SDR 产生的松弛误差，显著提高解的可行性与精确度；在多个系统中收敛精度均可达到 10^{-6} ，计算效率较现有算法提升 1.5~4.7 倍。

4) 在系统规模、运行状态等变化下均保持良好稳定性，适用性更为广泛。此外，SMSOC 亦适用于更一般的可拆分非凸 QP1QC 问题。未来研究将进一步探索其在弱环网拓扑、三相不平衡配电网

以及综合能源系统中的扩展潜力。

参考文献

- [1] 顾光荣, 杨鹏, 汤波, 等. 源-荷-储协同优化的配电网平衡能力提升方法[J]. 中国电机工程学报, 2024, 44(13): 5097-5108.
GU Guangrong, YANG Peng, TANG Bo, et al. A method for improving the balance ability of distribution networks through source-load-storage collaborative optimization[J]. Proceedings of the CSEE, 2024, 44(13): 5097-5108(in Chinese).
- [2] MU Chenggang, DING Tao, YUAN Yi, et al. Decentralized and private solution for the optimal dispatch of integrated wind farms with shared energy storage systems[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2025, 40(2): 1452-1464.
- [3] 张波, 高远, 李铁成, 等. 考虑光伏电源可靠性的新能源配电网数据驱动无功电压优化控制[J]. 中国电机工程学报, 2024, 44(15): 5934-5946.
ZHANG Bo, GAO Yuan, LI Tiecheng, et al. Data-driven voltage/var optimization control of active distribution network considering the reliability of photovoltaic power supply[J]. Proceedings of the CSEE, 2024, 44(15): 5934-5946(in Chinese).
- [4] 袁昌昊, 朱金大, 倪建富. 含分布式光伏的配电网双层协调电压优化方法[J]. 电力工程技术, 2023, 42(6): 74-82.
YUAN Changhao, ZHU Jinda, NI Jianfu. Coordinated voltage optimization method in distribution network with distributed photovoltaic[J]. Jiangsu Electrical Engineering, 2023, 42(6): 74-82(in Chinese).
- [5] DU Sijun, DING Tao, XIAO Yang, et al. Real-time scheduling of high-penetrated renewable power systems: an expert knowledge and reinforcement learning hybrid approach[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2025, 40(2): 1545-1557.
- [6] YUAN Yi, DING Tao, CHANG Xinyue, et al. A distributed multi-objective optimization method for scheduling of integrated electricity and hydrogen systems[J]. Applied Energy, 2024, 355: 122287.
- [7] LI Na, CHEN Lijun, LOW S H. Exact convex relaxation of OPF for radial networks using branch flow model[C]//2012 IEEE Third International Conference on Smart Grid Communications (SmartGridComm). Tainan, China: IEEE, 2012: 7-12.
- [8] BARAN M E, WU F F. Optimal capacitor placement on radial distribution systems[J]. IEEE Transactions on Power Delivery, 1989, 4(1): 725-734.
- [9] BARAN M, WU F F. Optimal sizing of capacitors placed on a radial distribution system[J]. IEEE Transactions on Power Delivery, 1989, 4(1): 735-743.
- [10] JABR R A. Radial distribution load flow using conic programming[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2006, 21(3): 1458-1459.
- [11] 刘一兵, 吴文传, 张伯明, 等. 基于混合整数二阶锥规划的主动配电网有功-无功协调多时段优化运行[J]. 中国电机工程学报, 2014, 34(16): 2575-2583.
LIU Yibing, WU Wenchuan, ZHANG Boming, et al. A mixed integer second-order cone programming based active and reactive power coordinated multi-period optimization for active distribution network [J]. Proceedings of the CSEE, 2014, 34(16): 2575-2583(in Chinese).
- [12] 田园, 汪可友, 李国杰, 等. 计及风电相关性的二阶锥动态随机最优潮流[J]. 电力系统自动化, 2018, 42(5): 41-47.
TIAN Yuan, WANG Keyou, LI Guojie, et al. Dynamic stochastic optimal power flow based on second-order cone programming considering wind power correlation[J]. Automation of Electric Power Systems, 2018, 42(5): 41-47(in Chinese).
- [13] BAI Xiaoqing, WEI Hua, FUJISAWA K, et al. Semidefinite programming for optimal power flow problems[J]. International Journal of Electrical Power & Energy Systems, 2008, 30(6-7): 383-392.
- [14] 常垚, 程林, 李洪涛, 等. 基于半正定松弛最优潮流的主动配电网多源协调优化控制[J]. 电网技术, 2016, 40(8): 2416-2422.
CHANG Yao, CHENG Lin, LI Hongtao, et al. Distribution system optimal power flow with various controllable sources based on semi-definite relaxation [J]. Power System Technology, 2016, 40(8): 2416-2422(in Chinese).
- [15] ZHANG Baosen, LAM A Y S, DOM ÍNGUEZ-GARCÍA A D, et al. An optimal and distributed method for voltage regulation in power distribution systems[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2015, 30(4): 1714-1726.
- [16] ZHANG Baosen. Control and optimization of power systems with renewables: voltage regulation and generator dispatch[D]. Berkeley: University of California, 2013.
- [17] LAVAEI J, LOW S H. Zero duality gap in optimal power flow problem[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2012, 27(1): 92-107.
- [18] BOSE S, LOW S H, TEERARATKUL T, et al. Equivalent relaxations of optimal power flow[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 60(3): 729-742.
- [19] GAN Lingwen, LI Na, TOPCU U, et al. Exact convex relaxation of optimal power flow in radial networks [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 60(1): 72-87.
- [20] BOYD S, VANDENBERGHE L. Convex optimization [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- [21] 邓振立, 张涛, 李荣, 等. 基于 ε -松弛的主动配电网有

- 功-无功协调调度求解方法[J]. 电力工程技术, 2020, 39(4): 104-111.
- DENG Zhenli, ZHANG Tao, LI Rong, et al. Active-reactive coordination scheduling method for active distribution network based on ε -relaxation [J]. Jiangsu Electrical Engineering, 2020, 39(4): 104-111(in Chinese).
- [22] JIA Wenhao, DING Tao, YUAN Yi, et al. Fast probabilistic energy flow calculation for natural gas systems: a convex multiparametric programming approach [J]. IEEE Transactions on Automation Science and Engineering, 2025, 22: 6786-6796.
- [23] TAYLOR J A. Convex optimization of power systems [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2015.
- [24] SRIKANTHA P, MALLICK M. Hidden convexities in decentralized coordination for the distribution networks [J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2020, 35(6): 4470-4483.
- [25] MALLICK M, SRIKANTHA P. Optimal decentralized microgrid coordination via the Schur's complement and S-procedure[J]. IEEE Transactions on Smart Grid, 2020, 11(1): 379-390.
- [26] 王赛一, 王成山. 配电网中辐射线路的最优分段处理[J]. 电力系统自动化, 2005, 29(8): 50-54.
- WANG Saiyi, WANG Chengshan. Optimal sectioned switches placements of radial lines in distribution network systems[J]. Automation of Electric Power Systems, 2005, 29(8): 50-54(in Chinese).
- [27] 马鑫, 郭瑞鹏, 王蕾, 等. 基于二阶锥规划的交直流主动配电网日前调度模型[J]. 电力系统自动化, 2018, 42(22): 144-150.
- MA Xin, GUO Ruipeng, WANG Lei, et al. Day-ahead scheduling model for AC/DC active distribution network based on second-order cone programming[J]. Automation of Electric Power Systems, 2018, 42(22): 144-150(in Chinese).
- [28] 李培帅, 吴在军, 张错, 等. 主动配电网分布式混合时间尺度无功/电压控制[J]. 电力系统自动化, 2021, 45(16): 160-168.
- LI Peishuai, WU Zaijun, ZHANG Cuo, et al. Distributed hybrid-timescale voltage/var control in active distribution networks[J]. Automation of Electric Power Systems, 2021, 45(16): 160-168(in Chinese).
- [29] 杜红卫, 尉同正, 夏栋, 等. 基于集群动态划分的配电网无功电压自律-协同控制[J]. 电力系统自动化, 2024, 48(10): 171-181.
- DU Hongwei, WEI Tongzheng, XIA Dong, et al. Reactive voltage self-regulation and coordination control in distribution networks based on cluster dynamic partition[J]. Automation of Electric Power Systems, 2024, 48(10): 171-181(in Chinese).
- [30] 张云霞. 配电网中分布式电源承载力评估研究[D]. 北京: 华北电力大学, 2022.
- ZHANG Yunxia. Research on the evaluation of distributed generation hosting capacity in distribution network [D]. Beijing: North China Electric Power University, 2022(in Chinese).
- [31] 张家安, 高晓东, 王铁成, 等. 计及弃光约束的配电网光伏接纳能力评估[J]. 电力工程技术, 2023, 42(6): 14-21.
- ZHANG Jiaan, GAO Xiaodong, WANG Tiecheng, et al. Evaluate the hosting capacity of PV in distribution network: considering PV curtailment constraints [J]. Jiangsu Electrical Engineering, 2023, 42(6): 14-21(in Chinese).
- [32] JÖNSSON U T. A Lecture on the S-procedure[C], Lecture notes, Division of Optimization and Systems Theory, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, 2001: 8-12.
- [33] ZIMMERMAN R D, MURILLO-SÁNCHEZ C E, THOMAS R J. MATPOWER: steady-state operations, planning, and analysis tools for power systems research and education[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2011, 26(1): 12-19.
- [34] 王晶, 袁懿, 邵尹池, 等. 考虑资源储备度的主动配电网多目标集群划分与电压控制方法[J]. 中国电力, 2023, 56(12): 69-79.
- WANG Jing, YUAN Yi, SHAO Yinchi, et al. Multi-objective cluster classification and voltage control approach for active distribution network considering resource reserve degree[J]. Electric Power, 2023, 56(12): 69-79(in Chinese).
- [35] FARIVAR M, LOW S H. Branch flow model: relaxations and convexification—Part I[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2013, 28(3): 2554-2564.

附录

<http://ntps.epri.sgcc.com.cn/djgxcb/CN/10.13334/j.0258-8013.pcsee.241768>



袁懿

在线出版日期: 2025-09-10。

收稿日期: 2024-07-23。

作者简介:

袁懿(2001), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为电力能源系统的经济运行与非凸优化, yy485784012@163.com;

*通信作者: 丁涛(1986), 男, 博士, 教授, 主要研究方向为电力系统经济运行、电力市场、能源经济, tding15@mail.xjtu.edu.cn;

穆程刚(1999), 男, 博士研究生, 主要研究方向为电力市场分布式交易。

(编辑 张文鑫, 胡琳琳)