

井眼轨道 TVDs 最优对齐设计问题的解析解

覃吉, 孟庆安, 鲁港, 王建华, 王海涛

(中国石油昆仑数智科技有限责任公司, 北京 100043)

摘要 针对“圆弧+稳斜+圆弧”型三维井眼轨道设计中稳斜段垂深(TVDs)已知但长期缺乏解析解的技术难题, 提出一种基于吴文俊消元法的解析解求解方法。通过建立九元非线性约束方程组, 利用数学机械化理论中的消元技巧, 推导出其特征多项式, 并将井眼轨道设计问题的解表示为特征多项式非负实数解与已知设计条件的解析表达式, 从而得到了井眼轨道设计的解析解。理论算例表明, 所提求解方法的计算结果与国际主流钻井设计软件 Compass 的计算结果高度一致, 且计算效率显著优于传统数值迭代法。进一步的实际算例验证了该方法的工程适用性, 其解算稳定性与多解筛选能力有效克服了迭代法初始值敏感、收敛性难以保证等固有缺陷。提出的求解方法突破了 TVDs 模型解析解的理论瓶颈, 为钻井设计软件的自主化研发提供了关键算法支撑, 助力国产化替代进程。

关键词 井眼轨道 TVDs 最优对齐 多元非线性方程组 解析解

1 前言

Compass 是国际上著名的钻井设计软件, 包含井眼轨道设计的 7 种方法 70 多个子模型, 其中有一种称为 TVDs 的子模型比较特殊。它是一个“圆弧+稳斜+圆弧”模型, 但是已知设计参数比较特殊, 为稳斜开始和结束点的垂深。TVDs 模型如何求解是哈里伯顿公司的技术秘密, 从未公开过。对于一般的“圆弧+稳斜+圆弧”三段制三维模型, 甚至“稳斜+圆弧+稳斜+圆弧+稳斜”这种更复杂的五段制三维模型, 如果已知设计条件是稳斜段长或者圆弧段的井眼曲率, 可以使用拟解析法^[1-5]求解。但是 TVDs 模型增加了垂深已知条件, 使得原有的拟解析解公式失效, 需要重新推导求解公式。尽管使用数值迭代法^[6-12]可以求近似解, 但是迭代格式收敛性的数学条件很难证明, 无法保证迭代一定是收敛的。数值迭代法另外还有两个固有缺陷, 一是很难给出足够接近于真解的迭代初始值, 二是在多解情况下难以求出全部解。

在钻井设计国产化替代软件的研发中, 也遇到了 TVDs 模型求解的难题。本研究借助吴文俊院士的数学机械化理论^[13]思路, 使用复杂的数学技巧, 从多元非线性设计约束方程组推导出解析解公式, 成功破解了 TVDs 模型求解难题, 并应用在国产化替代软件开发中。

2 TVDs 最优对齐设计模型

设 A 点为设计井眼轨道的开始点, 它可以是井口, 或者是侧钻井轨道设计的开窗侧钻点, 或者是使用分段拼接方法设计的当前井眼轨道的最后一点; D 点为目标点, 例如圆形靶的靶心, 或矩形靶的入靶点。要设计一段双圆弧井眼轨道 $ABCD$, 其中 AB 和 CD 为圆弧井段, BC 为稳斜井段, 如图 1 所示。

已知设计参数如下:

- ① 开始点 A 的坐标 (N_0, E_0, H_0) 、井斜角 α_0 、方位角 ϕ_0 、井深 L_0 ;
- ② 目标点 D 的坐标 (N_3, E_3, H_3) 、井斜角 α_3 、方位角 ϕ_3 ;
- ③ 稳斜井段开始点 B 的垂深 H_1 、结束点 C 的垂深 H_2 。

这个井眼轨道设计问题比较特殊, 不像其他轨道设计问题那样已知参数是井眼曲率等, 它的已知参数是设计轨道中间两点的垂深(TVD), 故在国际

基金项目: 中国石油集团公司技能人才创新基金项目“实钻井眼轨道的智能纠偏设计方法研究”(编号: LX2025KF0049)。

作者简介: 覃吉, 工程师, 工学硕士, 2022 年毕业于中国石油大学(北京)油气田开发工程专业, 目前主要从事钻完井软件研发与信息化建设工作。

通讯作者: 鲁港, 高级工程师, 中国石油昆仑数智科技有限责任公司特聘专家。E-mail: Lugang1999@sina.com

著名钻井设计软件 Compass 中称之为 TVDs 最优对齐设计(Optimum Align Well Planning Method)。

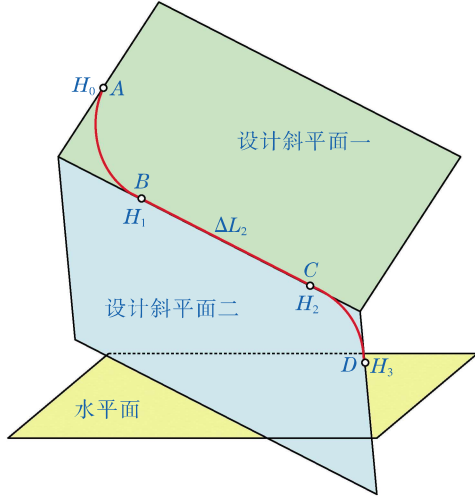


图 1 TVDs 最优对齐设计模型示意图

2.1 数学建模

设计节点 A、B、C、D 依次编号为 0、1、2、3, 设计井段 AB、BC、CD 依次编号为 1、2、3; 设计节点 i 井深为 L_i (m), 井斜角为 α_i (rad), 方位角为 ϕ_i (rad), 东坐标为 E_i (m), 北坐标为 N_i (m), 垂深为 H_i (m); 设稳斜段 BC 的段长为 ΔL_2 (m)。

记设计节点($i=0, 1, 2, 3$)的井眼方向矢量为:

$$\mathbf{t}_i = \begin{bmatrix} \sin\alpha_i \cos\phi_i \\ \sin\alpha_i \sin\phi_i \\ \cos\alpha_i \end{bmatrix} \quad (1)$$

由于 BC 为稳斜段, 有 $\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_2$ 。

设计节点($i=0, 1, 2, 3$)的位移矢量为:

$$\mathbf{r}_i = \begin{bmatrix} N_i \\ E_i \\ H_i \end{bmatrix} \quad (2)$$

对于圆弧井段($i=1, 3$), 井段增量公式为:

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1} = \lambda_i (\mathbf{t}_i + \mathbf{t}_{i-1}) \\ \lambda_i = \frac{1}{\kappa_i} \tan \frac{\varepsilon_i}{2} \\ \varepsilon_i = \arccos(\mathbf{t}_i \cdot \mathbf{t}_{i-1}) \end{cases} \quad (3)$$

式中: λ_i 为圆弧的半切长, m; ε_i 为狗腿角, rad; κ_i 为圆弧的井眼曲率, rad/m。

令:

$$\Delta H_i = H_i - H_{i-1} \quad (4)$$

则 TVDs 最优对齐设计模型的约束方程组如式(5)所示:

$$\begin{cases} \lambda_1 \mathbf{t}_0 + (\lambda_1 + \Delta L_2 + \lambda_3) \mathbf{t}_2 + \lambda_3 \mathbf{t}_3 = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_0 \\ \cos \varepsilon_1 = \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{t}_2 \\ \cos \varepsilon_3 = \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{t}_3 \\ \lambda_1 \kappa_1 = \tan(0.5 \varepsilon_1) \\ \lambda_3 \kappa_3 = \tan(0.5 \varepsilon_3) \\ (\cos \alpha_0 + \cos \alpha_2) \lambda_1 = \Delta H_1 \\ \Delta L_2 \cos \alpha_2 = \Delta H_2 \\ (\cos \alpha_2 + \cos \alpha_3) \lambda_3 = \Delta H_3 \end{cases} \quad (5)$$

未知数为 $\Delta L_2, \alpha_2, \phi_2, \lambda_1, \lambda_3, \varepsilon_1, \varepsilon_3, \kappa_1, \kappa_3$ 。

2.2 无量纲化

设:

$$\begin{cases} d = \|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_0\| \\ \mathbf{t}_a = (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_0) / d \\ x_2 = \Delta L_2 / d \\ x_i = \lambda_i / d \quad i=1, 3 \\ k_i = \kappa_i d \quad i=1, 3 \\ h_i = \Delta H_i / d \quad i=1, 2, 3 \end{cases} \quad (6)$$

则 TVDs 最优对齐设计模型的无量纲化约束方程组为:

$$\begin{cases} x_1 \mathbf{t}_0 + (x_1 + x_2 + x_3) \mathbf{t}_2 + x_3 \mathbf{t}_3 = \mathbf{t}_a \\ \cos \varepsilon_1 = \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{t}_2 \\ \cos \varepsilon_3 = \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{t}_3 \\ k_1 x_1 = \tan(0.5 \varepsilon_1) \\ k_3 x_3 = \tan(0.5 \varepsilon_3) \\ (\cos \alpha_0 + \cos \alpha_2) \tan(0.5 \varepsilon_1) = k_1 h_1 \\ x_2 \cos \alpha_2 = h_2 \\ (\cos \alpha_2 + \cos \alpha_3) \tan(0.5 \varepsilon_3) = k_3 h_3 \end{cases} \quad (7)$$

未知数为 $x_1, x_2, x_3, k_1, k_3, \alpha_2, \phi_2, \varepsilon_1, \varepsilon_3$, 共 9 个。方程组(7)有 9 个独立方程(第一个矢量方程为两个标量方程), 理论上方程组是适定的, 可解。

3 解析解

如果直接使用多元非线性方程组的各种数值迭代求解算法^[6-12]来求方程组(7)的数值解, 会遇到至少三个困难: ①无法给出好的迭代初始值, 当迭代初始值不在解的收敛域之内, 迭代算法将不会收敛到方程组的解; ②即使迭代算法收敛, 收敛到的解也可能不是有物理意义的解; ③如果方程组有多个解, 需要试用很多次不同的迭代初始值, 才有可能求出方程组的全部多个解。一个好的求解算法应该是与初始迭代值无关的, 能无遗漏地求出全部解。显然, 各种数值迭代法不是好的求解算法。

本文给出方程组(7)的解析解,完全解决了数值迭代法的各种缺陷。

3.1 消元法

定义几个常数:

$$u_0 = \cos \alpha_0, u_3 = \cos \alpha_3, w_0 = u_0 u_3 \quad (8)$$

$$c_1 = t_0 \cdot t_a, c_3 = t_3 \cdot t_a, c_{13} = t_0 \cdot t_3, a_{13} = 1 - c_{13}, b_{13} = 1 + c_{13} \quad (9)$$

先消去未知数 α_2 , 从式(7)后 5 个方程得到:

$$\begin{cases} u_0 x_1 x_2 + h_2 x_1 = h_1 x_2 \\ u_3 x_2 x_3 + h_2 x_3 = h_3 x_2 \\ \cos \alpha_2 = h_2 / x_2 \end{cases} \quad (10)$$

再消去未知数 $\varepsilon_1, \varepsilon_3$ 和未知矢量 t_2 , 从式(7)前 5 个方程得到:

$$\begin{cases} x_2^2 + 2x_1 x_2 + 2x_2 x_3 + 2a_{13} x_1 x_3 + 2c_1 x_1 + 2c_3 x_3 = 1 \\ (x_2 + a_{13} x_3 + c_1) k_1^2 x_1^2 = x_2 + 2x_1 + b_{13} x_3 - c_1 \\ (x_2 + a_{13} x_1 + c_3) k_3^2 x_3^2 = x_2 + 2x_3 + b_{13} x_1 - c_3 \end{cases} \quad (11)$$

又从式(10)得到:

$$\begin{cases} x_1 x_2 = (h_1 x_2 - h_2 x_1) / u_0 \\ x_2 x_3 = (h_3 x_2 - h_2 x_3) / u_3 \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} x_1 = h_1 x_2 / (u_0 x_2 + h_2) \\ x_3 = h_3 x_2 / (u_3 x_2 + h_2) \end{cases} \quad (13)$$

将式(12)代入式(11)第一式, 得到:

$$x_2^2 + 2(h_1/u_0 + h_3/u_3)x_2 + 2(c_1 - h_2/u_0)x_1 + 2(c_3 - h_2/u_3)x_3 + 2a_{13}x_1x_3 = 1 \quad (14)$$

3.2 特征多项式

再将式(13)代入式(14), 得到:

$$x_2^2 + A_2 x_2 + A_1 \frac{h_1 x_2}{u_0 x_2 + h_2} + A_3 \frac{h_3 x_2}{u_3 x_2 + h_2} + 2a_{13} \frac{h_1 h_3 x_2^2}{(u_0 x_2 + h_2)(u_3 x_2 + h_2)} = 1 \quad (15)$$

其中:

$$\begin{cases} A_1 = 2(c_1 - h_2/u_0) \\ A_2 = 2(h_1/u_0 + h_3/u_3) \\ A_3 = 2(c_3 - h_2/u_3) \end{cases} \quad (16)$$

如果令:

$$x_2 = \frac{h_2}{y_2} \quad (17)$$

将式(17)代入式(15), 得到:

$$\frac{h_2^2}{y_2^2} + \frac{A_2 h_2}{y_2} + \frac{A_1 h_1}{u_0 + y_2} + \frac{A_3 h_3}{u_3 + y_2} + \frac{2a_{13} h_1 h_3}{(u_0 + y_2)(u_3 + y_2)} = 1 \quad (18)$$

方程(18)是关于未知数 y_2 的分式方程, 进一步化简成未知数 x_2 的多项式方程, 称为特征多项式:

$$w_0 x_2^4 + w_1 x_2^3 + w_2 x_2^2 + w_3 x_2 + w_4 = 0 \quad (19)$$

其中:

$$\begin{cases} w_1 = (u_0 + u_3)h_2 + w_0 A_2 \\ w_2 = h_2^2 + 2a_{13}h_1h_3 + u_3 A_1 h_1 + (u_0 + u_3)A_2 h_2 + u_0 A_3 h_3 - w_0 \\ w_3 = [A_1 h_1 + A_2 h_2 + A_3 h_3 - (u_0 + u_3)]h_2 \\ w_4 = -h_2^2 \end{cases} \quad (20)$$

方程(19)是未知数 x_2 的一元 4 次多项式方程, 其有解析解。

3.3 其他未知数的计算公式

在求出未知数 x_2 之后, 其他未知数的计算公式如下:

$$\begin{cases} x_1 = h_1 x_2 / (u_0 x_2 + h_2) \\ x_3 = h_3 x_2 / (u_3 x_2 + h_2) \\ t_2 = (t_a - x_1 t_0 - x_3 t_3) / (x_1 + x_2 + x_3) \\ \alpha_2 = \text{Inc}(t_2) \\ \phi_2 = \text{Azi}(t_2) \\ \varepsilon_1 = \arccos(t_0 \cdot t_2) \\ \varepsilon_3 = \arccos(t_2 \cdot t_3) \\ k_1 = (1/x_1) \tan(\varepsilon_1/2) \\ k_3 = (1/x_3) \tan(\varepsilon_3/2) \end{cases} \quad (21)$$

式中: 函数 $\text{Inc}(t_2)$ 、 $\text{Azi}(t_2)$ 分别为从井眼方向矢量 t_2 求井斜角和方位角的函数^[1]。

假设:

$$t_2 = \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix}, c = \frac{l}{\sqrt{l^2 + m^2}} \quad (22)$$

则:

$$\text{Inc}(t_2) = \arccos n \quad (23)$$

$$\text{Azi}(t_2) = \begin{cases} 0 & m=0, l \geq 0 \\ \pi & m=0, l < 0 \\ \arccos c & m > 0 \\ 2\pi - \arccos c & m < 0 \end{cases} \quad (24)$$

如果方程组(7)的解满足约束不等式(25):

$$\begin{cases} 0 \leq x_2 < 1 \\ 0 < x_i < 1 \\ k_i > 0 & i = 1, 3 \\ 0 < \varepsilon_i < \pi \\ 0 \leq \alpha_2 < \pi \end{cases} \quad (25)$$

并且方程组(7)中的每一个方程都满足, 则称之为有物理意义的解析解。

3.4 轨道设计问题的解

对有物理意义的解析解做无量纲化的逆变换:

$$\begin{cases} \kappa_1=k_1/D \\ \kappa_3=k_3/D \\ \lambda_1=x_1D \\ \lambda_3=x_3D \\ \Delta L_2=x_2D \end{cases} \quad (26)$$

令 $\kappa_{\min}=0.01\pi/5400, \kappa_{\max}=15\pi/5400, \alpha_{\max}=0.65\pi$ 。

如果方程组(7)有物理意义的解析解满足约束不等式(27), 则称之为轨道设计问题的真解; 否则, 称之为伪解或增解, 应舍弃不用。

$$\begin{cases} \kappa_{\min} \leq \kappa_i \leq \kappa_{\max} & i=1, 3 \\ 0 \leq \alpha_2 \leq \alpha_{\max} \end{cases} \quad (27)$$

然后, 用式(28)求出井眼轨道的设计节点参数:

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1=\mathbf{r}_0+\lambda_1(\mathbf{t}_0+\mathbf{t}_2) \\ \mathbf{r}_2=\mathbf{r}_1+(\Delta L_2)\mathbf{t}_2 \\ \mathbf{r}'_3=\mathbf{r}_2+\lambda_3(\mathbf{t}_2+\mathbf{t}_3) \\ \Delta L_i=\varepsilon_i/\kappa_i & i=1, 3 \\ L_i=L_{i-1}+\Delta L_i & i=1, 2, 3 \end{cases} \quad (28)$$

可以用 $\delta=\|\mathbf{r}_3-\mathbf{r}'_3\|$ 来考察轨道设计问题的求解精度。

4 算例

4.1 理论算例方法

给定设计参数 $N_0, E_0, H_0, L_0, \alpha_0, \phi_0, \alpha_2, \phi_2, \alpha_3, \phi_3, \Delta L_2, \kappa_1, \kappa_3$, 使用式(29)计算出井眼轨道的所有节点参数:

$$\begin{cases} \varepsilon_1=\arccos(\mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{t}_2) \\ \varepsilon_3=\arccos(\mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{t}_3) \\ \lambda_i=(1/\kappa_i)\tan(\varepsilon_i/2) & i=1, 3 \\ \Delta L_i=\varepsilon_i/\kappa_i & i=1, 3 \\ L_i=L_{i-1}+\Delta L_i & i=1, 2, 3 \\ \mathbf{r}_1=\mathbf{r}_0+\lambda_1(\mathbf{t}_0+\mathbf{t}_2) \\ \mathbf{r}_2=\mathbf{r}_1+(\Delta L_2)\mathbf{t}_2 \\ \mathbf{r}_3=\mathbf{r}_2+\lambda_3(\mathbf{t}_2+\mathbf{t}_3) \end{cases} \quad (29)$$

然后用计算出的 H_1, H_2, H_3, N_3, E_3 作为已知设计参数去求解轨道设计问题, 得到设计参数 $\alpha_2, \phi_2, \Delta L_2, \kappa_1, \kappa_3$, 从而检验本文解析解公式是否正确, 以及求解误差是多少。

在使用理论算例时, 所有物理量都使用计算机系统的双精度浮点数。为了与本文算法求解结果相对比, 非整数数据取小数点之后 10 位。

4.1.1 算例 1

设计参数如下: $L_0=N_0=E_0=H_0=0\text{m}, \Delta L_2=600\text{m}, \alpha_0=0^\circ, \phi_0=\phi_2=0^\circ, \alpha_2=10^\circ, \alpha_3=20^\circ, \phi_3=30^\circ, \kappa_1=3^\circ/30\text{m}, \kappa_3=4^\circ/30\text{m}$ 。使用式(29)计算出的轨道节点数据见表 1。

4.1.2 算例 2

设计参数如下: $N_0=300\text{m}, E_0=400\text{m}, H_0=500\text{m}, L_0=600\text{m}, \Delta L_2=250\text{m}, \alpha_0=10^\circ, \phi_0=30^\circ, \alpha_2=15^\circ, \phi_2=45^\circ, \alpha_3=20^\circ, \phi_3=60^\circ, \kappa_1=4^\circ/30\text{m}, \kappa_3=3^\circ/30\text{m}$ 。使用式(29)计算出的轨道节点数据见表 2。

表 1 算例 1 井眼轨道设计节点参数

井深/m	井斜角/(°)	方位角/(°)	垂深/m	南北/m	东西/m	井眼曲率/[(°)·30m ⁻¹]
0	0	0	0	0	0	0
100	10	0	99.4930770045	8.7045163372	0	3
700	10	0	690.3777288119	112.8934229374	0	0
792.6419835820	20	30	779.8693800804	134.7418583713	7.9521801632	4

表 2 算例 2 井眼轨道设计节点参数

井深/m	井斜角/(°)	方位角/(°)	垂深/m	南北/m	东西/m	井眼曲率/[(°)·30m ⁻¹]
600	10	30	500	300	400	0
644.4149471449	15	45	543.3594718117	307.4104908441	405.9977337989	4
894.4149471449	15	45	784.8409283839	353.1636663171	451.7509092720	0
961.3768401677	20	60	848.7155580745	365.0301937416	467.8136287801	3

4.2 理论算例验证

4.2.1 算例 3

理论算例 1 的验证, 已知设计参数见表 3。

使用本文计算方法进行求解, 特征多项式为:

$$x_2^3+2.0331280946x_2^2+0.4574877403x_2^2-$$

$$1.1685109047x_2-0.5931404655$$

特征多项式方程全部实数根为: $-1.0475379571, -0.9867113086, -0.7569678832, 0.7580890543$, 经过

验证,只有第4个正实数根满足约束不等式(25),其他实数根为增根,应舍弃。轨道设计结果见表4(为

与理论算例表1相对比,非整数数据取小数点之后11位或12位)。

表3 算例3 已知数据

井深/m	井斜角/(°)	方位角/(°)	垂深/m	南北/m	东西/m	井眼曲率/[(°)·30m ⁻¹]
0	0	0	0	0	0	0
			99.4930770045			
			690.3777288119			0
	20	30	779.8693800804	134.7418583713	7.9521801632	

表4 算例3 求解结果

井深/m	井斜角/(°)	方位角/(°)	垂深/m	南北/m	东西/m	井眼曲率/[(°)·30m ⁻¹]
0	0	0.0	0	0	0	0
99.9999999997	10.0000000000	0.0	99.4930770045	8.70451633721	-2.3628771×10 ⁻¹²	3.000000000001
700.0000000005	10.0000000000	0.0	690.3777288119	112.89342293738	-3.0645388×10 ⁻¹¹	0
792.64198358201	20	30.0000000000	779.8693800804	134.7418583713	7.9521801632	4.000000000001

与表1中的已知数据相比较,使用本文算法求解结果的精度小于10⁻¹⁰,这可以归结为计算机内部数值计算的舍入误差。由此可见,本文算法是非常

精确的。

4.2.2 算例4

理论算例2的验证,已知设计参数见表5。

表5 算例4 已知数据

井深/m	井斜角/(°)	方位角/(°)	垂深/m	南北/m	东西/m	井眼曲率/[(°)·30m ⁻¹]
600	10	30	500	300	400	0
			543.3594718117			
			784.8409283839			0
	20	60	848.7155580745	365.0301937416	467.8136287801	

使用本文计算方法进行求解,特征多项式为:

$$x_2^4 + 2.0107662308x_2^3 + 0.5297553032x_2^2 - 0.9640321115x_2 - 0.4831169652$$

特征多项式方程全部实数根为:-1.0235391896, -0.9923142763, -0.6871437005, 0.6922309355, 经过验证,只有第4个实数根满足约束不等式(25),其他实数根为增根,应该舍弃。轨道设计结果见表6(为

与理论算例表2相对比,非整数数据取小数点之后11位或12位)。与表2中的已知数据相比较,使用本文算法求解结果的精度小于10⁻¹⁰,这可以归结为计算机内部数值计算的舍入误差。由此可见,本文算法是非常精确的。

通过以上两个理论算例,证明了本文算法非常精确,能够完美准确地再现已知数据。

表6 算例4 求解结果

井深/m	井斜角/(°)	方位角/(°)	垂深/m	南北/m	东西/m	井眼曲率/[(°)·30m ⁻¹]
600	10	30	500	300	400	0
644.41494714489	14.9999999999	45.0000000001	543.3594718117	307.41049084408	405.99773379890	3.99999999999
894.41494714481	14.9999999999	45.0000000001	784.8409283839	353.16366631709	451.75090927193	0
961.37684016778	20	60	848.7155580745	365.0301937416	467.81362878010	3.00000000000

4.3 实际算例验证

使用算例1的已知设计参数的两位精度近似,见表7。

4.3.1 算例5

表 7 算例 5 已知数据

井深/ m	井斜角/ (°)	方位角/ (°)	垂深/ m	南北/ m	东西/ m	井眼曲率/ [(°)·30m ⁻¹]
0	0	0	0	0	0	0
			99.49			
			690.38			0
	20	30	779.87	134.74	7.95	

使用本文算法进行求解,求解结果见表 8(计算数据保留小数点之后 4 位,已知数据保持原样),使用国际著名钻井设计软件 Compass 的求解结果见表 9(除了井眼曲率保留小数点之后 3 位,Compass 计算结果只能显示小数点之后 2 位)。对比表 8 和表 9 的计算结果,本文算法与 Compass 软件几乎完全相同。

表 8 算例 5 井眼轨道设计节点本文算法计算结果

井深/m	井斜角/(°)	方位角/(°)	垂深/m	南北/m	东西/m	井眼曲率/ [(°)·30m ⁻¹]
0	0	0	0	0	0	0
100.0000	10.0000	0.0000	99.49	8.7045	-2.362×10 ⁻¹²	3.0000
700.0000	10.0000	0.0000	690.38	112.8934	-3.065×10 ⁻¹¹	0
792.6420	20	30	779.87	134.7419	7.9522	4.0000

表 9 算例 5 井眼轨道设计节点 Compass 计算结果

井深/m	井斜角/(°)	方位角/(°)	垂深/m	南北/m	东西/m	井眼曲率/ [(°)·30m ⁻¹]
0	0	0	0	0	0	0
100.00	10.00	0.00	99.49	8.70	0.00	3.000
700.00	10.00	0.00	690.38	112.89	0.00	0
792.64	20	30	779.87	134.74	7.95	4.000

4.3.2 算例 6

使用算例 2 的已知设计参数的两位精度近似,见表 10。

使用本文算法进行求解,求解结果见表 11,使用国际著名钻井设计软件 Compass 的求解结果见表 12。对比表 11 和表 12 的计算结果,本文算法与 Compass 软件几乎完全相同。

表 10 算例 6 已知数据

井深/ m	井斜角/ (°)	方位角/ (°)	垂深/ m	南北/ m	东西/ m	井眼曲率/ [(°)·30m ⁻¹]
600	10	30	500	300	400	0
			543.36			
			784.84			0
	20	60	848.72	365.03	467.81	

表 11 算例 6 井眼轨道设计节点本文算法计算结果

井深/m	井斜角/(°)	方位角/(°)	垂深/m	南北/m	东西/m	井眼曲率/ [(°)·30m ⁻¹]
600	10	30	500	300	400	0
644.4149	15.0000	45.0000	543.36	307.4105	405.9977	4.0000
894.4149	15.0000	45.0000	784.84	353.1637	451.7509	0
961.3768	20	60	848.72	365.0302	467.8136	3.0000

表 12 算例 6 井眼轨道设计节点 Compass 计算结果

井深/m	井斜角/(°)	方位角/(°)	垂深/m	南北/m	东西/m	井眼曲率/ [(°)·30m ⁻¹]
600	10	30	500	300	400	0
644.42	15.00	45.00	543.36	307.41	406.00	3.999
894.41	15.00	45.00	784.84	353.16	451.75	0
961.38	20	60	848.72	365.03	467.81	3.000

5 结论

本文建立了井眼轨道 TVDs 最优对齐设计的数学模型,使用数学机械化理论中吴文俊消元技巧,推导出这个九元非线性方程组的解析解,并使用理论算例验证了解析解的正确性。与国际著名钻井设计软件 Compass 进行对比,计算结果几乎完全一致。本文提出的解析解方法可以用在钻井设计软件的国产化替代软件开发中。

参考文献:

- [1] 鲁港.圆弧型井眼轨道设计问题的拟解析解理论[J].石油钻探技术,2014,42(1):26-32.
- [2] 鲁港,夏泊溆,鲁天骐,等.井眼轨道设计的拟解析解理论[M].北京:石油工业出版社,2014.
- [3] 鲁港,夏泊溆,佟长海,等.基于多项式实数根的三维井眼轨道设计理论[J].数学的实践与认识,2014,44(20):114-129.
- [4] 鲁港,习伟东,来建强.三维圆弧型井眼轨道设计模型的拟解析解[J].石油学报,2020,41(12):1679-1685.
- [5] 鲁港,王海涛,李杉,等.三维七段制圆弧型井眼轨道设计的拟解析解[J].石油学报,2023,44(9):1545-1551.
- [6] 冯国忱.非线性方程组迭代解法[M].上海:上海科学技术出版社,1989.
- [7] 刘修善,石在虹.给定井眼方向的修正轨道设计方法[J].石油学报,2002,23(2):72-76.
- [8] 刘修善,何树山.井眼轨道的软着陆设计模型及其应用[J].天然气工业,2002,22(2):43-45.
- [9] 黄根炉,赵金海,赵金洲,等.限定目标点井眼方向待钻轨道设计新方法[J].石油钻采工艺,2006,28(1):19-22.
- [10] 唐雪平,苏义脑,陈祖锡.三维井眼轨道设计模型及其精确解[J].石油学报,2003,24(4):90-93.
- [11] 唐雪平,苏义脑,陈祖锡.三维井眼轨道设计模型及应用[J].数学的实践与认识,2004,34(3):62-72.
- [12] 洪迪锋,唐雪平,高文凯,等.圆弧型井眼轨道设计模型的综合求解法[J].石油学报,2021,42(2):226-232.
- [13] 吴文俊.吴文俊论数学机械化[M].济南:山东教育出版社,1996.

(编辑 谢守国)

Analytical Solution to TVDs Optimal Alignment in Wellbore Trajectory Design

Qin Ji, Meng Qing'an, Lu Gang, Wang Jianhua, Wang Haitao

(Kunlun Digital Technology Co., Ltd., Beijing 100043)

[Abstract] Aiming at the technical problem that the total vertical depth (TVDs) of the holding section is known but has no analytical solutions in the design of the three-dimensional wellbore trajectory of the "arc + holding + arc" type, this paper proposes an analytical solution method based on Wu Wenjun's elimination method. A system of nine nonlinear constraint equations is established to derive a characteristic polynomial using the elimination technique from the theory of mathematical mechanization. The solution to the wellbore trajectory design is expressed as an analytical expression of the non-negative real solutions in the characteristic polynomial and the known design conditions, resulting in an analytical solution for the wellbore trajectory design. Theoretical examples show that the calculation results of the proposed method are highly consistent with those of Compass, a leading international drilling design software, and the computational efficiency is significantly better than that of the traditional numerical iterative methods. Further practical examples verify the engineering applicability of this method. Its solution stability and multi-solution screening capability effectively overcome the inherent drawbacks of the iterative method, such as sensitive initial values and difficulty in ensuring convergence. This research has broken the theoretical bottleneck of the analytical solution for the TVDs model, providing key algorithmic support for the independent research and development of drilling design software and facilitating the process of domestic substitution.

[Keywords] wellbore trajectory; TVDs optimal alignment; multiple nonlinear equations; analytical solution