

文章编号:1674-7607(2025)01-0001-09

DOI:10.19805/j.cnki.jcspe.2025.230654

高阶球形谐波法求解辐射传输方程:模型开发与 ANSYS-Fluent 软件实现

庞佳婕¹, 王良², 曾琦², 曹俊², 任涛¹

(1. 上海交通大学 中英国际低碳学院, 上海 201306;

2. 中国航发湖南动力机械研究所, 湖南株洲 412002)

摘要: 为了改善 ANSYS-Fluent 软件中用于辐射传热计算的球形谐波法仅限于其最低阶(P1)形式的现状, 基于高阶球形谐波法求解辐射传输方程的基本原理, 利用 ANSYS-Fluent 软件提供的用户自定义函数(UDF)和用户自定义标量(UDS)接口, 通过对控制方程和边界条件的耦合数值求解, 开发了适用 ANSYS-Fluent 软件的高阶球形谐波法辐射传输方程求解模型。模型的精度通过对一维、二维平板及二维轴对称火焰的辐射传热进行计算, 并且与相应的精确解或光子蒙特卡罗(PMC)解进行对比来实现。结果表明: 开发的 P3 模型相比于 ANSYS-Fluent 软件中自带的 P1 模型无论是在计算辐射强度的角空间分布还是在辐射传热的总体热源方面都更加准确。

关键词: 辐射传热; 辐射传输方程; 球形谐波; 自定义函数

中图分类号:TK124

文献标志码:A

学科分类号:470.1020

High-order Spherical Harmonic Methods for Solving Radiative Transfer Equations: Model Development and Implementation in ANSYS-Fluent Software

PANG Jiajie¹, WANG Liang², ZENG Qi², CAO Jun², REN Tao¹

(1. China-UK Low Carbon College, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 201306, China;

2. AECC Hunan Aviation Powerplant Research Institute, Zhuzhou 412002, Hunan Province, China)

Abstract: In order to improve the status that the spherical harmonics method in the ANSYS-Fluent software is limited to its lowest order (P1) form for radiation heat transfer calculations, based on the basic principles of solving the radiative transfer equation using high-order spherical harmonics, by coupling the numerical solution of the governing equations and boundary conditions using the user-defined function (UDF) and user-defined scalar (UDS) interfaces provided in the ANSYS-Fluent software, a high-order spherical harmonics radiation transfer equation solution model suitable for the software was developed. The model accuracy was verified by calculating the radiative heat transfer in one-dimensional, two-dimensional flat plates, and two-dimensional axisymmetric flame, and comparing with the corresponding analytical or photon Monte Carlo (PMC) solutions. Results show that the P3 model developed in this paper is more accurate than the built-in P1 model of ANSYS-Fluent software in calculating both the angular distri-

收稿日期:2023-10-30 修订日期:2023-11-20

基金项目:国家自然科学基金资助项目(52276077)

作者简介:庞佳婕(1999—),女,辽宁大连人,硕士研究生,研究方向为辐射传输模型。

任涛(通信作者),男,副教授,博士,E-mail:tao.ren@sjtu.edu.cn。

bution of radiation intensity and the overall radiative heat source.

Key words: radiative heat transfer; radiative transfer equation; spherical harmonics; user definition function

作为燃烧过程中重要的热交换形式及能量和信息传递的重要方式,辐射传热近年来在国防和民用高新技术领域得到了广泛的发展和應用。在辐射传热问题的分析和实际应用中,辐射传输方程(RTE)的求解十分重要,其准确计算关乎各领域中辐射传热的准确分析。RTE 是一个在射线方向上的能量平衡方程,描述了辐射能量在介质中传递时的发射、吸收和散射作用。RTE 是一个包含 5 个自变量(3 个空间变量和 2 个方向变量)的积分-微分方程。对辐射传递方程的精确解析求解非常困难,只有在非常简单的情况下才能得到显式解。多数“精确”解仅限于一维平板和灰体介质。由于复杂的几何特性、边界条件、随波长和方向变化的辐射特性等原因,实际的热辐射传输问题通常十分复杂。因此,对于这类问题几乎无法求取解析解。随着计算机技术和数值计算方法的发展,辐射传热数值计算作为理论分析的基础和实验研究的补充逐渐显现出其作用,诸多研究致力于 RTE 的近似及其数值求解^[1-2]。

对 RTE 求解使用最广泛的近似方法有离散坐标法(DOM)^[3]或有限体积法(FVM)^[4]、蒙特卡罗(PMC)法^[5]和球形谐波(PN)法^[6]。DOM/FVM 在空间和方向上对辐射强度进行离散,在现代计算流体力学(CFD)软件中的实现相对简单。通过增加角度离散化,可以获得比 DOM/FVM 精度更高的解;但对于光学厚度较大的介质而言,其计算成本较高。由于角度离散化,该方法也可能存在“射线效应”和“假散射”等不可避免的问题^[6]。PMC 法作为一种随机统计算法,其求解结果被认为是有统计误差的精确解,并且其统计误差随着随机光子束数量的增加而减小。PMC 法可以相对容易地处理辐射传热建模中的复杂问题^[7],例如非射线光谱特性、非均匀介质和不规则几何结构等,但是 PMC 法计算成本随着随机光子束的增加将急剧增加。PN 法通过将辐射强度扩展为一系列球谐函数来解耦空间和方向依赖关系,将积分-微分辐射传输方程转化为椭圆偏微分方程组,从而实现辐射传输方程的近似求解。在 PN 近似中,随着近似阶数 N 的增大,计算精度会不断提高。球形谐波函数构成了完备正交基,可以表示任意光滑函数。而 DOM/FVM 由于采用有限单元或控制体积的离散求解,在相当的计算成本

下,难以达到和 PN 法一样的精度。但高阶 PN 法在数学上非常复杂且数值求解存在较大困难。因此,在如今通用的 CFD 软件中,如 ANSYS-Fluent、ANSYS-CFX、STAR-CC 和 COMSOL,几乎只包含 P1 模型。对于光学薄的介质,由于其辐射强度在空间方向上的变化梯度很大,P1 模型的计算结果会出现较大的误差。球形谐波法的研究大多止于 P1 模型,并且高阶 PN 法的应用也长期局限于一维情况。随着阶数 N 的增加,PN 法在数学上的复杂性呈指数级增长,所以高阶球形谐波法在 CFD 软件中的开发存在一定难度。

虽然 P1 模型能够给出辐射强度随方向的连续变化,但因截断误差的影响,其计算精度受到了限制。为了拓展 PN 法的高阶应用,许多学者也曾对高阶 PN 法进行了深入的研究。Bayazitoglu 等^[8]将 PN 法扩展到 P5,并将其应用于柱坐标系下的一维问题求解,发现 P3 近似比 P1 近似有很大的改进,而 P5 近似的改进较小。Cheng^[9]用 PN 法分析了非散射辐射灰色气体一维可压缩流动中的辐射传递。虽然得到了任意 N 阶的控制方程,但只将最低阶 P1 用于 RTE 的求解。Canosa 等^[10]、Dave 等^[11]在大气辐射传输问题中使用了考虑各向异性散射的 PN 法,表明了 PN 法在有效解决散射问题方面具有潜力。Arpaci 等^[12]将 P3 法应用于 Benard 问题(水平平行板之间的自然对流传热研究),发现 P3 法的结果比 P1 法更准确。Bayazitoglu 等^[8]在直角坐标、柱坐标和球坐标的一维问题上使用了 P3 法。P3 法求解被证明在所有坐标系下比 P1 法更准确。

因此,基于对 RTE 进行球形谐波近似,通过对转换后得到的 $N(N+1)/2$ 个二阶椭圆偏微分方程及其 Marshak 边界条件^[13]进行耦合数值求解,以在 ANSYS-Fluent 软件中实现对高阶 PN(P3)模型的开发和数值求解。同时,通过模型的验证实现对一维、二维平板及二维轴对称火焰的辐射传热计算。

1 高阶 PN 辐射模型理论

1.1 控制方程组

辐射传输方程可以表述为

$$\hat{s} \cdot \nabla_r I + I = (1 - \omega) I_b + \frac{\omega}{4\pi} \int_{4\pi} I(\hat{s}') \Phi(\hat{s} \cdot \hat{s}') d\Omega' \quad (1)$$

式中: \hat{s} 为辐射传输方向单位向量; τ 为光学厚度; I 为辐射强度, W/m^2 ; ω 为散射反照率; I_b 为黑体辐射强度, W/m^2 ; ω_γ 为光谱散射反照率; Φ 为散射相函数,描述了来自方向 \hat{s}' 的射线被散射到另一个方向 \hat{s} 的概率; Ω' 为单位立体角。

球形谐波法是一种数学物理方法,其实质是将辐射传输方程中含有角度变量的函数,如辐射强度和散射相函数等,用一组正交完备的球形谐波函数来表示。如果取其前 N 阶来近似表示,则称为 PN 近似^[14]。理论上,PN 近似随着近似阶数 N 的增大,解的精度也会提高,但数学上的复杂性也急剧增加。PN 法将辐射强度场扩展为用无穷级数表示的正交的球形谐波函数,从而将辐射强度在空间和方向上进行分离。虽然展开的无穷阶球形谐波函数可以用来准确表示辐射强度在空间 and 不同方向上的分布,一般则通过 N 阶的截断级数来近似表示,介质内 τ 处辐射强度 I 可以表示为二维傅里叶级数的形式,其表达式为

$$I(\tau, \hat{s}) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=-n}^n I_n^m(\tau) Y_n^m(\hat{s}) \quad (2)$$

式中: I_n^m 为辐射强度系数; Y_n^m 为球形谐波函数^[14]。

球形谐波在球面坐标下满足拉普拉斯方程,其

对于每个 $Y_n^m, n=0, 2, \dots, N-1, 0 \leq m \leq n$:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^3 \left\{ (L_{xx} - L_{yy}) \left[(1 + \delta_{m2}) a_k^{mm} I_{n+4-2k}^{m-2} + \frac{\delta_{m1}}{2} c_k^{mm} I_{n+4-2k}^m + e_k^{mm} I_{n+4-2k}^{m+2} \right] + \right. \\ & (L_{xx} + L_{xx}) \left[(1 + \delta_{m1}) b_k^{mm} I_{n+4-2k}^{m-1} + d_k^{mm} I_{n+4-2k}^{m+1} \right] + (L_{xx} + L_{yy}) \left[-(1 - \delta_{m2}) a_k^{mm} I_{n+4-2k}^{-(m-2)} + \right. \\ & \left. \frac{\delta_{m1}}{2} c_k^{mm} I_{n+4-2k}^{-m} + e_k^{mm} I_{n+4-2k}^{-(m+2)} \right] + (L_{yz} + L_{zy}) \left[-(1 - \delta_{m1}) b_k^{mm} I_{n+4-2k}^{-(m-1)} + d_k^{mm} I_{n+4-2k}^{-(m+1)} \right] + \\ & \left. (L_{xx} + L_{yy} - 2L_{zz}) c_k^{mm} I_{n+4-2k}^m \right\} + [L_{zz} - (1 - \omega \delta_{0n})] I_n^m = -(1 - \omega) I_b \delta_{0n} \quad (6) \end{aligned}$$

对于每个 $Y_n^{-m}, n=0, 2, \dots, N-1, 1 \leq m \leq n$:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^3 \left\{ (L_{xy} + L_{yx}) \left[(1 + \delta_{m2}) a_k^{mm} I_{n+4-2k}^{m-2} + \frac{\delta_{m1}}{2} c_k^{mm} I_{n+4-2k}^m - e_k^{mm} I_{n+4-2k}^{m+2} \right] + \right. \\ & (L_{yz} + L_{zy}) \left[(1 + \delta_{m1}) b_k^{mm} I_{n+4-2k}^{m-1} - d_k^{mm} I_{n+4-2k}^{m+1} \right] + (L_{xx} - L_{yy}) \left[(1 - \delta_{m2}) a_k^{mm} I_{n+4-2k}^{-(m-2)} - \right. \\ & \left. \frac{\delta_{m1}}{2} c_k^{mm} I_{n+4-2k}^{-m} + e_k^{mm} I_{n+4-2k}^{-(m+2)} \right] + (L_{xx} + L_{xx}) \left[(1 - \delta_{m1}) b_k^{mm} I_{n+4-2k}^{-(m-1)} + d_k^{mm} I_{n+4-2k}^{-(m+1)} \right] + \\ & \left. (L_{xx} + L_{yy} - 2L_{zz}) c_k^{mm} I_{n+4-2k}^{-m} \right\} + (L_{zz} - 1) I_n^m = 0 \quad (7) \end{aligned}$$

式中: $a_k^{mm}, b_k^{mm}, c_k^{mm}, d_k^{mm}, e_k^{mm}$ 均为常数系数^[6],取值仅与常数 m, n, k 有关; δ_{ij} 为 Kronecker 三角函数^[6]。

1.2 边界条件

图 1 为边界条件示意图,其中: \hat{n} 为边界面的外法向量; r_w 为边界处到 O 的距离; r 为介质内任意点到 O 的距离; θ' 为边界处极角; ψ' 为边界处方位

定义为

$$Y_n^m = \begin{cases} \cos(m\psi) P_n^m(\cos \theta), & m \geq 0 \\ \sin(m\psi) P_n^m(\cos \theta), & m < 0 \end{cases} \quad (3)$$

式中: θ 为极角; ψ 为方位角; P_n^m 为勒让德多项式^[14]。

将式(2)代入 RTE 方程(式(1))中,并假设散射是各向同性的,集合所有的单阶的球形谐波,可以得到一系列与 I_n^m 相关联的 $(N+1)^2$ 个一阶偏微分方程。通过球形谐波函数及 Legendre 多项式正交性进行化简后,可以消除奇数阶的强度系数,最终得到只与偶数阶相关联的 $N(N+1)/2$ 个椭圆偏微分方程。每个偏微分方程和全局坐标系定义下的 Y_n^m 相关,详细推导过程可参考文献[15]。通过定义二阶算子 L (仅例举 2 个):

$$L_{xy} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (4)$$

$$L_{zz} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (5)$$

式中: x, y, z 均为全局坐标系的坐标; β 为消光系数, m^{-1} 。

可以得到在三维笛卡尔坐标系下用于各向同性散射的二阶椭圆偏微分方程组的最终形式,具体表达形式如下。

角; \hat{k} 为介质内任意位置处指向全局坐标系 z 轴方向的法向量。

在边界上任意位置的辐射强度都满足:

$$I(\mathbf{r} = \mathbf{r}_w, \hat{s}) = I_w(\mathbf{r}_w, \hat{s}), \quad \hat{n} \cdot \hat{s} > 0 \quad (8)$$

式中: I_w 为边界面的辐射强度。

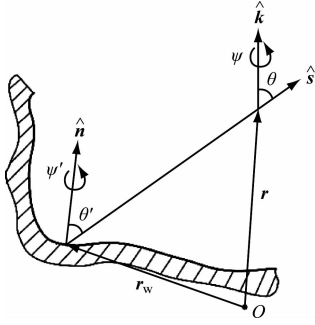


图 1 边界条件示意图

Fig. 1 Schematic of boundary conditions

PN 模型将辐射强度 I 截断至第 N 项, 如果直接将式(2)代入式(8), 式(8)将不再成立, 必须采用积分形式的 Marshak 边界条件^[13], 即

对于 \bar{Y}_n^0 , 存在:

$$I_w p_{0,n}^0 = \sum_{l=0}^{\frac{N-1}{2}} \sum_{m'=-2l}^{2l} p_{2l,n}^0 \bar{\Delta}_{0,m'}^{2l} I_{2l}^{m'} + \frac{\partial}{\partial \tau_x} \sum_{l=1}^{\frac{N-1}{2}} \sum_{m'=-2l}^{2l} (v_{li}^0 \bar{\Delta}_{1,m'}^{2l}) I_{2l}^{m'} + \frac{\partial}{\partial \tau_x} \sum_{l=1}^{\frac{N-1}{2}} \sum_{m'=-2l}^{2l} (v_{li}^0 \bar{\Delta}_{-1,m'}^{2l}) I_{2l}^{m'} - \frac{\partial}{\partial \tau_z} \sum_{l=0}^{\frac{N-1}{2}} \sum_{m'=-2l}^{2l} \omega_{li}^0 \bar{\Delta}_{0,m'}^{2l} I_{2l}^{m'} \quad (10)$$

对于 \bar{Y}_n^m , 存在:

$$0 = \sum_{l=0}^{\frac{N-1}{2}} \sum_{m'=-2l}^{2l} p_{2l,2i-1}^m \bar{\Delta}_{\pm m,m'}^{2l} I_{2l}^{m'} - \frac{\partial}{\partial \tau_x} \sum_{l=1}^{\frac{N-1}{2}} \sum_{m'=-2l}^{2l} [(1 \pm \delta_{m,1}) u_{li}^m \bar{\Delta}_{\pm(m-1),m'}^{2l} - v_{li}^m \bar{\Delta}_{\pm(m+1),m'}^{2l}] I_{2l}^{m'} \pm \frac{\partial}{\partial \tau_y} \sum_{l=l_2}^{\frac{N-1}{2}} \sum_{m'=-2l}^{2l} [(1 \mp \delta_{m,1}) u_{li}^m \bar{\Delta}_{\mp(m-1),m'}^{2l} + v_{li}^m \bar{\Delta}_{\mp(m+1),m'}^{2l}] I_{2l}^{m'} - \frac{\partial}{\partial \tau_z} \sum_{l=0}^{\frac{N-1}{2}} \sum_{m'=-2l}^{2l} \omega_{li}^m \bar{\Delta}_{\pm m,m'}^{2l} I_{2l}^{m'} \quad (11)$$

式中: $u_{li}^m, v_{li}^m, \omega_{li}^m$ 均为常数系数^[13]; $\bar{\Delta}$ 为旋转矩阵^[13]。

l_1 和 l_2 定义为

$$l_1 = \begin{cases} 0, & \text{对于 } \bar{Y}_{2i-1}^m \\ 1, & \text{对于 } \bar{Y}_{2i}^m \end{cases}, l_2 = \begin{cases} 1, & \text{对于 } \bar{Y}_{2i-1}^m \\ 0, & \text{对于 } \bar{Y}_{2i}^m \end{cases} \quad (12)$$

式(10)、式(11)中的偏导数是在局部光学坐标系下定义的, 由式(13)~式(15)给出:

$$\frac{\partial}{\partial \tau_x} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \quad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau_y} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \quad (14)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau_z} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \quad (15)$$

式中: $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ 分别为局部坐标系下的 x, y, z 轴坐标。

2 高阶 PN 模型的二次开发

通过耦合偏微分方程组及其对应的边界条件,

$$\int_{\mathbf{n} \cdot \mathbf{s} > 0} I(\mathbf{r}_w, \hat{\mathbf{s}}) \bar{Y}_{2i-1}^m d\Omega = \int_{\mathbf{n} \cdot \mathbf{s} > 0} I_w(\hat{\mathbf{s}}) \bar{Y}_{2i-1}^m d\Omega \quad (9)$$

$$i = 1, 2, \dots, \frac{1}{2}(N+1)$$

式中: \bar{Y} 为局部坐标球形谐波函数; $I(\mathbf{r}_w, \hat{\mathbf{s}})$ 为边界面处辐射强度; $I_w(\hat{\mathbf{s}})$ 为实际表面处辐射强度。

式(9)是在局部坐标系下计算的, 为了得到适用于任意几何的边界条件通式, 必须通过欧拉旋转定理^[16]将式(9)中的局部坐标球形谐波函数 \bar{Y} 转换到全局坐标系下, 最后再将式(2)代入, 详细推导过程可参考文献[13]。对于在三维笛卡尔坐标系下用于各向同性散射问题的边界条件的最终形式, 由式(10)~式(11)给出。

通过数值建模实现了对高阶 PN 方法中辐射强度系数的准确求解。对高阶 PN 模型的二次开发包括了 2 个部分的内容: 数值模型的建立、数值方程的求解。

2.1 高阶 PN 数值模型建立

基于 ANSYS-Fluent 软件, 采用有限体积法对 $N(N+1)/2$ 个偏微分方程及其边界条件进行耦合迭代求解。为了更加清晰地表示每个控制方程要求解的目标变量, 将式(6)、式(7)对应的球形谐波 Y_n^m 表示为 Y_i , 将辐射强度系数 I_n^m 表示为 ϕ_i , 标量符号列表如表 1 所示。

通过代数形式的转化, 可将式(6)、式(7)中 ϕ_i 的二阶导数用拉普拉斯算子表示为

$$(L_{xx} + L_{yy} - 2L_{zz})c_2^{mm} \phi_i + L_{zz} \phi_i - (1 - \omega \delta_{1i}) \phi_i = c_2^{mm} \nabla_{\tau}^2 \phi_i + (1 - 3c_2^{mm})L_{zz} \phi_i - (1 - \omega \delta_{1i}) \phi_i \quad (16)$$

表 1 控制方程中未知数的符号表示

Tab. 1 Denotations of unknowns in governing equations

i	ϕ_i	I_n^m	Y_i	Y_n^m
1	ϕ_1	I_0^0	Y_1	Y_0^0
2	ϕ_2	I_2^{-2}	Y_2	Y_2^{-2}
3	ϕ_3	I_2^{-1}	Y_3	Y_2^{-1}
4	ϕ_4	I_2^0	Y_4	Y_2^0
5	ϕ_5	I_2^1	Y_5	Y_2^1
6	ϕ_6	I_2^2	Y_6	Y_2^2

式(6)、式(7)中不考虑拉普拉斯算子,将其余各项整理为控制方程的源项 E_i ,进一步得到

$$E_i = -(1 - \omega)\delta_{1i}I_b - (1 - 3c_2^m)L_{zz}\phi_i + \sum_{j=1, j \neq i}^{N_2} f_j(L\phi_j) \quad (17)$$

式中: f_j 为其余除 ϕ_i 之外对应的二阶算子。

由于 ANSYS-Fluent 软件给出的边界条件只能以第一类边界条件的形式自定义输入。而 PN 的边界条件是第三类边界条件,需要对边界条件的数值模型进行重新构建,进行向第一类边界条件形式的转化,以适配后续的 UDF 接口。首先将式(10)、式(11)表达为

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{I} + \mathbf{Q}_x \cdot \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial \tau_x} + \mathbf{Q}_y \cdot \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial \tau_y} + \mathbf{Q}_z \cdot \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial \tau_z} = I_w \mathbf{p} \quad (18)$$

式中: \mathbf{Q} 为辐射强度系数 I_n^m 对应的系数矩阵; $\mathbf{Q}_x, \mathbf{Q}_y, \mathbf{Q}_z$ 为 $\partial \phi / \partial \tau_x, \partial \phi / \partial \tau_y, \partial \phi / \partial \tau_z$ 各自对应的系数矩阵; \mathbf{I} 为辐射强度系数 ϕ_i 矩阵; \mathbf{p} 为常数系数矩阵。

在计算出系数矩阵中的所有元素后,通过在式(18)左右两边同时左乘 \mathbf{Q}^{-1} ,可以将辐射强度系数矩阵 \mathbf{I} 分离出来,设 i 为矩阵的行索引,PN 模型的第三类边界条件标准形式为

$$\phi_i + Z_{i,i} \frac{\partial \phi_i}{\partial \tau_z} = \delta_{1i} I_w - \sum_{j=1, j \neq i}^{N_2} \left[\mathbf{X}_{i,j} \frac{\partial \phi_j}{\partial \tau_x} + \mathbf{Y}_{i,j} \frac{\partial \phi_j}{\partial \tau_y} + \mathbf{Z}_{i,j} \frac{\partial \phi_j}{\partial \tau_z} \right] \quad (19)$$

$$\begin{cases} \mathbf{X} = \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{Q}_x \\ \mathbf{Y} = \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{Q}_y \\ \mathbf{Z} = \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{Q}_z \end{cases} \quad (20)$$

将式(19)中的法向导数采用一阶格式离散,得到

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_b = \frac{\phi_b - \phi_c}{d_{cb}} \quad (21)$$

式中: d_{cb} 为正交网格的面中心 b 与相邻单元中心 C 之间的距离。

最终,将式(21)代入式(19),可以整理出边界面处 ϕ_b 的表达式,至此完成了第三类边界条件向第一类边界条件的转换。

2.2 高阶 PN 数值模型求解

ANSYS-Fluent 软件是目前适用范围较广,发展相对成熟的可视化商用 CFD 软件之一。因此,基于 ANSYS-Fluent 软件,利用其提供的 UDF,并配合 UDS 和 UDM 等接口,将上述 PN 模型嵌入 ANSYS-Fluent 软件中。图 2 绘制了 PN 模型在 ANSYS-Fluent 软件上的实现方法和计算流程。

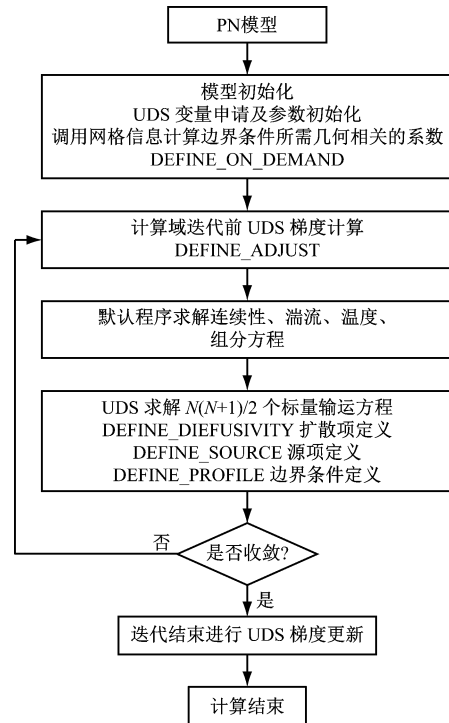


图 2 PN 模型在 ANSYS-Fluent 软件上的计算流程

Fig. 2 Calculation process of the implementation of PN model in ANSYS-Fluent software

计算的流程可以分为:

(1) 模型的初始化。在 ANSYS-Fluent 软件中进行 UDS 变量的申请和参数的初始化,利用 UDF 接口函数 DEFINE_ON_DEMAND,在初次迭代前使用它在 ANSYS-Fluent 软件中“按需”执行 UDF 来计算与几何相关的系数矩阵并储存在边界面的 F_UDSI 中,以供在后续计算边界条件 DEFINE_PROFILE 宏中使用。

(2) UDS 梯度定义及计算。利用 UDF 接口函数 DEFINE_ADJUST 计算 UDS 变量的一阶梯度及二阶交叉梯度,在每次迭代前调用。

(3) ANSYS-Fluent 软件中求解默认方程组。该过程 ANSYS-Fluent 软件进行默认方程组的迭代求解,包括连续性方程、湍流方程、温度方程、组分方程等。

(4) 标量运输方程的求解。为了计算单个单元格真实源项,使用宏 DEFINE_SOURCE 计算,并将该值返回给求解器。对于扩散项来说,宏 DEFINE_

DIFFUSIVITY 用来指定用户定义的标量(UDS)传输方程的扩散系数,它只计算单个单元格的扩散系数,并将实值返回给求解器。使用 DEFINE_PRO-

FILE 可以定义自定义边界或单元格区域条件,设置适当的边界面值。各项表达式及在 UDS 中对应的宏如表 2 所示。

表 2 方程中各项在 ANSYS-Fluent 软件的定义

Tab. 2 Definition of equation terms in ANSYS-Fluent software

项目	表达式	在 UDS 中对应的宏
扩散项	$\frac{c_{\omega}^{gm}}{\beta}$	DEFINE_DIFFUSIVITY
源项	$E_i = -(1 - \omega)\delta_{i1}I_b - (1 - 3c_{\omega}^{gm})L_{\infty}\phi_i + \sum_{j=1, j \neq i}^{N_i} f_j(L\phi_j)$	DEFINE_SOURCE
边界面值	ϕ_{ω}	DEFINE_PROFILE

(5) 迭代判断。如果 UDS 达到设置的收敛标准,计算结束;否则,返回步骤 2 开始新一轮迭代过程。

3 模型验证与结果分析

3.1 与 ANSYS-Fluent 软件中 P1 模型的对比

为了对比开发的 P3 模型与 ANSYS-Fluent 软件自带的 P1 模型在辐射传热计算精度方面的区别,选取一个一维平板进行辐射传热计算和对比。算例 1 为均质辐射介质,平板上下边界为黑体冷壁面,温度设置为 300 K,中间为均质高温介质,温度

为 1 200 K。RTE 的求解选用 ANSYS-Fluent 软件自带的 P1 模型和开发的 P3 模型,并且以一维平板的精确解^[6]为基准进行对比。为了展示 PN 方法在不同光学厚度下的性能,算例 1 展示了 3 个不同光学厚度($\tau=10, 1, 0.1$)下的计算入射辐射强度的计算结果。除此之外,还计算了平板中心处的辐射强度的空间分布。PN 法的辐射强度的空间分布是通过式(2)来重建的。将得到的辐射强度在单位空间立体角下进行 4π 积分,可以得到入射辐射 G 。不同光学厚度下的入射辐射和中心辐射强度空间分布的计算结果如图(3)~图(5)所示。

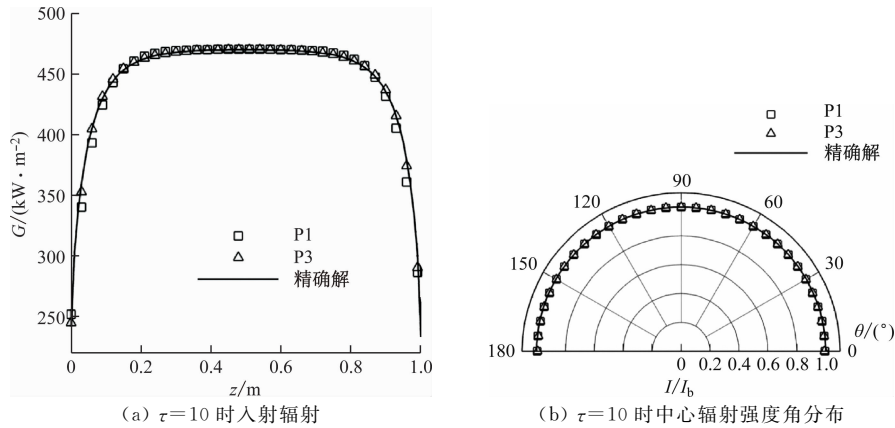


图 3 $\tau=10$ 时一维均质平板的 PN 数值解与精确解对比

Fig. 3 Comparison between numerical solutions and exact solutions by PN for 1-D slab example with homogeneous medium for $\tau=10$

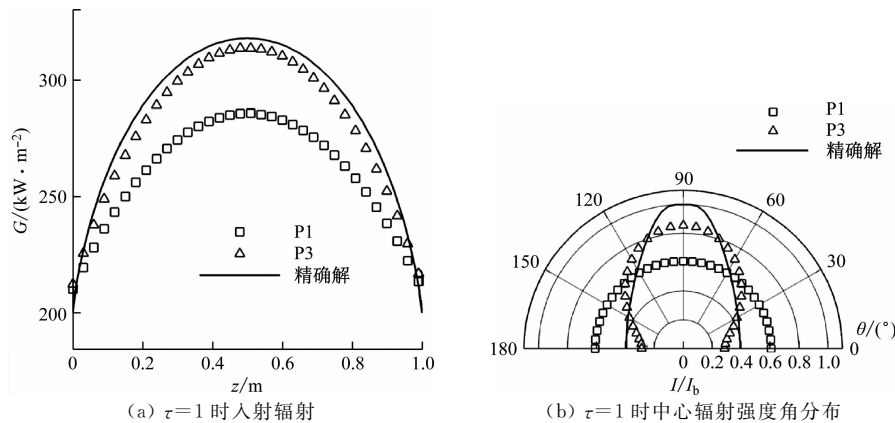


图 4 $\tau=1$ 时一维均质平板的 PN 数值解与精确解对比

Fig. 4 Comparison between numerical solutions and exact solutions by PN for 1-D slab example with homogeneous medium for $\tau=1$

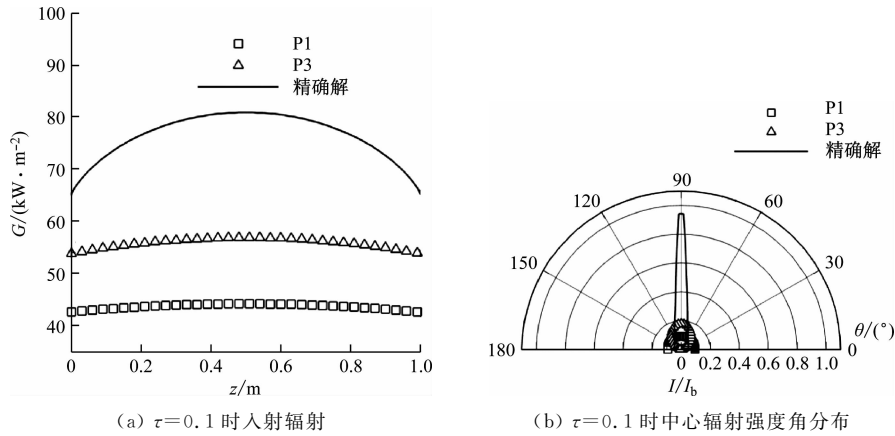


图 5 $\tau=0.1$ 时一维均质平板的 PN 数值解与精确解对比

Fig. 5 Comparison between numerical solutions and exact solutions by PN for 1-D slab example with homogeneous medium for $\tau=0.1$

$\tau=10$ 时,由 P1 模型计算得到的入射辐射强度在边界处与精确解略有偏差,P3 模型则给出了基本与精确解一致的结果。而平板中心的辐射强度角分布无论是 P1 模型还是 P3 模型都和精确解的计算结果相吻合,这是因为在大的光学厚度条件下,辐射强度的角空间分布趋于各向同性,低阶球形谐波函数即可准确表示其角空间的分布。当光学厚度减小至 1 时,P1 模型在预测入射辐射时会产生较大误差,P3 模型则比 P1 模型有显著提升。在小的光学厚度下,辐射强度的角空间的分布趋于各向异性,而 P1 模型预测的中心辐射强度角分布是各向同性的,不能准确描述辐射强度的角空间分布。通过增加 PN 的阶数则可以提高 PN 法的精度,因此 P3 模型预测的辐射强度分布则更加准确。如果进一步将光学厚度减小至 0.1,辐射强度表现出高度的各向异性特点,无论 P3 模型还是 P1 模型都会有较大误差,但 P3 模型始终比 P1 模型更趋近于精确解。

算例 2 以文献[13]中的二维几何平板进行同参数的数值模拟计算,计算对象为一个边长为 1 m 的正方形几何平板,假设边界为黑体冷壁面。方形平板中辐射介质的辐射特性的公式为

$$4\pi I_b = 4\pi[1 + 5r^2(2 - r^2)] \quad (22)$$

$$\kappa = C_k[1 + 3.75(2 - r^2)^2] \quad (23)$$

$$r^2 = x^2 + y^2, -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1 \quad (24)$$

式中: κ 为吸收系数, m^{-1} 。

辐射强度和吸收系数沿平板对角线的分布如图 6 所示。

通过对吸收系数乘以一个常数项 C_k 改变光学厚度的大小,来展示不同光学厚度下的计算结果。 C_k 分别取 0.1 和 1.0 分别代表了光学厚度较小和较大的情况。由于高维辐射传热计算没有可参考的

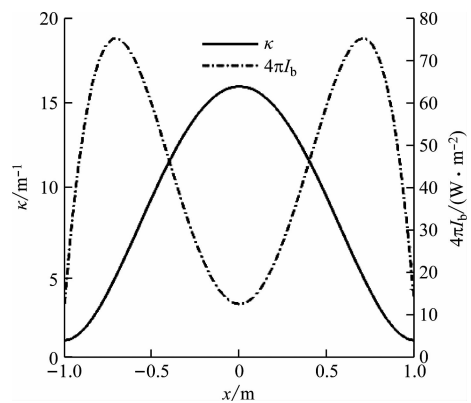


图 6 对角线的辐射特性分布

Fig. 6 Radiative properties along the diagonal

解析解,二维和三维计算结果的对比验证则以在 OpenFOAM 平台下开发的 PMC 方法^[17]的计算结果作为参考基准。图 7 给出了 $C_k=1$ 时的计算结果,P1 模型能够较准确地预测入射辐射在平板内部的分布,在边界上有较大误差,而 P3 模型的计算结果几乎和 PMC 方法的计算结果无明显差异。当 $C_k=0.1$ 时,即光学厚度较小的情况下,如图 8 所示,P1 模型和 P3 模型的计算结果都与 PMC 法产生较大差距,但 P3 模型的计算结果比 P1 模型有较大提升。

3.2 火焰辐射传热计算

为了进一步验证模型的准确性,选取了 Sandia D 火焰^[18]的稳态数值模拟场进行了辐射热损失的计算和对比。Sandia D 火焰是甲烷-空气射流火焰,主要辐射介质包括烧气体产物 CO_2 、 H_2O 和 CO 。火焰的压力为 1 bar。Sandia D 火焰模拟过程和结果详见文献[19],温度和各气体组分质量分数如图 9 所示。

在 ANSYS-Fluent 软件计算时,RTE 的求解采用其自带的 P1 模型和开发的 P3 模型。为了避免光谱模型对计算结果的影响,计算中光谱模型均采

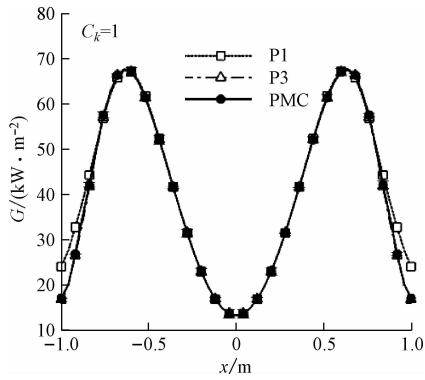


图 7 $C_k=1$ 条件下二维非均质平板入射辐射

Fig. 7 Incident radiation in a 2-D nonhomogeneous flat plate under the condition of $C_k=1$

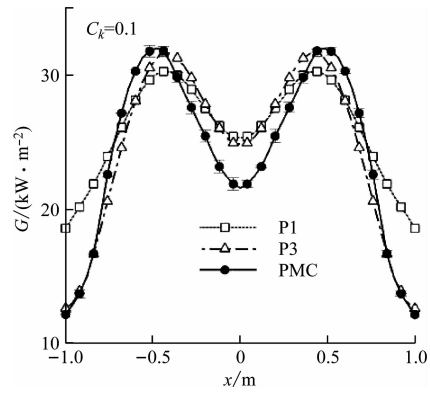


图 8 $C_k=0.1$ 条件下二维非均质平板入射辐射

Fig. 8 Incident radiation in a 2-D nonhomogeneous flat plate under the condition of $C_k=0.1$

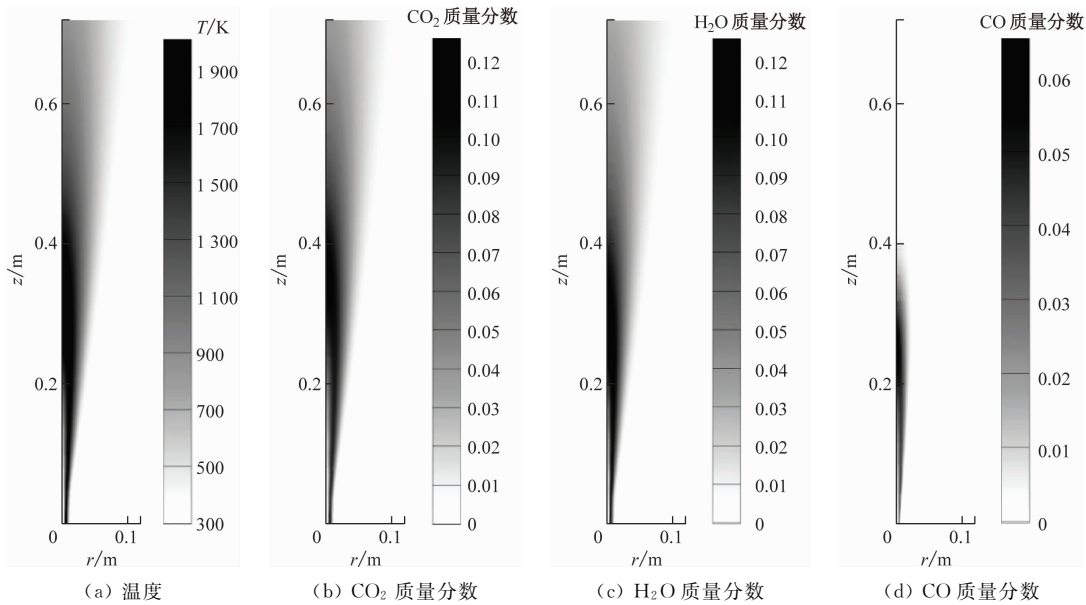


图 9 Sandia D 火焰温度、各气体组分质量分数分布图

Fig. 9 Distributions of temperature, mass fractions of gas components of Sandia D flame

用以普朗克平均吸收系数为基准的灰体模型。在该火焰中,选取轴向位置($z=0.1, 1.0, 1.4$ m)进行对应的辐射热损失 $\nabla \cdot q$ 计算结果的采样,结果如图 10 所示。通过比较 P1 模型、P3 模型与 PMC 法的结果,可以看出,P3 模型在火焰的各个位置的计

算结果均明显优于 P1 模型,随着阶数的增加,辐射热损失更接近于 PMC 法的结果,P3 模型相比于 P1 模型,对辐射热损失的计算在不同火焰位置均有所提升。

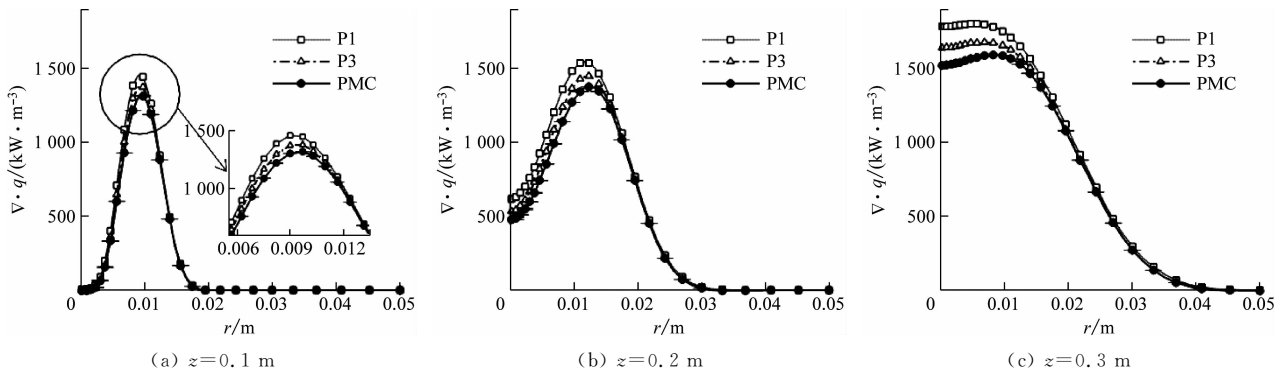


图 10 Sandia D 火焰的 3 个轴向位置($z=0.1, 0.2, 0.3$ m)基于不同 RTE 方法计算出的辐射热损失分布比较

Fig. 10 Comparison of radiative heat losses for Sandia D flame calculated based on different RTE methods at three axial locations ($z=0.1, 0.2, 0.3$ m)

开发的高阶 P3 模型也可以降阶为 P1 模型使用,其精度虽然与 ANSYS-Fluent 软件内嵌的 P1 模型一致,但为了保证模型的通用性,其计算效率有所降低。表 3 展示了 3 种 RTE 方法所需的中央处理器(CPU)耗时,所有的计算都是在一个 2.10 GHz Intel(R) Xeon(R) 5218R 的处理器上完成的。由表 2 可以看出,开发的 P1 模型比 ANSYS-Fluent 软件内嵌的 P1 模型的计算效率要低。随着阶数从 1 增加至 3,所需求解的偏微分方程也由 1 个增加至 6 个,但由于 6 个偏微分方程之间是强耦合的,计算相同算例的 CPU 时间并不是呈线性增加的。针对本算例,开发的 P3 模型的计算时间是 P1 模型的 10 倍多。

表 3 不同求解方法所需的 CPU 计算时间

Tab.3 CPU time costs required for different methods

单位:s

RTE 方法	CPU 计算时间
P1(内嵌)	0.442
P1	1.621
P3	17.562

4 结论

开发适用于 ANSYS-Fluent 软件的高阶球形谐波法辐射模型,以提高其在预测复杂几何和光学较薄条件下的辐射传输计算精度为目标。主要结论为:

(1) 基于球形谐波法求解辐射传输方程的基本原理,给出了高阶 PN 模型的控制方程和边界条件的数值表达形式。然后,通过构建用户自定义函数,实现了模型方程组和边界条件的耦合求解,并且完成了与 ANSYS-Fluent 软件接口的适配,开发了适用于该平台的高阶(P3)球形谐波法辐射传输方程求解模型。

(2) 通过一维、二维和火焰的二维轴对称算例的计算结果表明,与 ANSYS-Fluent 软件自带的 P1 模型相比,开发的 P3 模型能够更准确地预测辐射强度的角空间分布和辐射传热量。P3 模型相比于 P1 模型,对火焰辐射传热的计算也有明显改进,随着球形谐波法阶数的增加,辐射热损失计算结果更接近准确的光子蒙特卡罗法解。

提供了在商用 CFD 软件中实现高阶球形谐波法辐射模型的数值方法,为后续研究奠定了基础,也为类似复杂耦合方程组和第三类边界条件的数值求解提供了参考。

参考文献:

- [1] 刘林华. 炉膛传热计算方法的发展状况[J]. *动力工程*, 2000, 20(1): 523-527, 538.
LIU Linhua. Development status of heat transfer calculation methods in boiler furnaces[J]. *Journal of Power Engineering*, 2000, 20(1): 523-527, 538.
- [2] 王鹏, 陈寅彪, 廖海燕, 等. 200 MW 富氧燃烧锅炉配风优化数值模拟研究[J]. *动力工程学报*, 2019, 39(2): 98-103.
WANG Peng, CHEN Yinbiao, LIAO Haiyan, et al. Numerical simulation on optimization of air distribution mode for a 200 MW oxy-fuel combustion boiler[J]. *Journal of Chinese Society of Power Engineering*, 2019, 39(2): 98-103.
- [3] LEE C E. The discrete Sn approximation to transport theory[R]. Los Alamos: Los Alamos National Laboratory, 1961.
- [4] CHAI J C, LEE H S, PATANKAR S V. Finite volume method for radiation heat transfer[J]. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 1994, 8(3): 419-425.
- [5] HOWELL J R. Application of monte carlo to heat transfer problems[J]. *Advances in Heat Transfer*, 1969; 5:1-54.
- [6] MODEST M F. Radiative heat transfer[M]. 3rd ed. San Diego: Elsevier, 2013.
- [7] 李村生. 煤粉燃烧放热及介质辐射特性参数的数值分析[J]. *动力工程*, 1982, 2(4): 31-37, 75.
LI Cunsheng. A numerical analysis of the heat-release rate due to combustion of pulverized coal and radiative properties of the media[J]. *Power Engineering*, 1982, 2(4): 31-37, 75.
- [8] BAYAZITOGU Y, HIGENYI J. Higher-order differential equations of radiative transfer: P3 approximation[J]. *AIAA Journal*, 1979, 17(4): 424-431.
- [9] CHENG Ping. Study of the flow of a radiating gas by a differential approximation[D]. Palo Alto: Stanford University, 1965.
- [10] CANOSA J, PENAFIEL H R. A direct solution of the radiative transfer equation; application to Rayleigh and Mie atmospheres[J]. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 1973, 13(1): 21-39.
- [11] DAVE J V, CANOSA J. A direct solution of the radiative transfer equation; application to atmospheric models with arbitrary vertical nonhomogeneities[J]. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 1974, 31(4): 1089-1101.

(下转第 27 页)

- Acta Acustica*, 2023, 48(2): 356-365.
- [7] 杨延锋, 姜根山, 刘月超, 等. 声流曳力和声辐射力协同作用下颗粒运动的数值模拟[J]. *动力工程学报*, 2020, 40(12): 995-1001.
YANG Yanfeng, JIANG Genshan, LIU Yuechao, et al. Numerical simulation on the motion of particles under synergistic action of streaming-induced drag force and acoustic radiation force[J]. *Journal of Chinese Society of Power Engineering*, 2020, 40(12): 995-1001.
- [8] 安连锁, 杨文泽, 武国红, 等. 气固两相流介质中声衰减测量方法研究[J]. *声学技术*, 2009, 28(1): 6-9.
AN Liansuo, YANG Wenze, WU Guohong, et al. A study of acoustical attenuation measurement in gas-solid two-phase flow[J]. *Technical Acoustics*, 2009, 28(1): 6-9.
- [9] 杨文泽. 声波在气固两相流介质中传播特性的实验研究[D]. 保定: 华北电力大学, 2009.
- [10] 钱祖文. 浓颗粒介质中的声传播和参数反演[J]. *自然科学进展*, 1995, 5(1): 47-54.
QIAN Zuwen. Advances in natural science sound propagation and parameter inversion in dense particle media[J]. *Progress in Natural Science*, 1995, 5(1): 47-54.
- [11] 刘建斌, 吴健. 球形粒子的散射特性分析[J]. *激光杂志*, 2004(6): 39-41.
LIU Jianbin, WU Jian. Analysis of scattering of spherical particles [J]. *Laser Journal*, 2004(6): 39-41.
- [12] VALVERDE J M. Acoustic streaming in gas-fluidized beds of small particles [J]. *Soft Matter*, 2013, 9(37): 8792-8814.
- [13] 关雪丰. 壁面附近声传播规律研究[D]. 郑州: 郑州大学, 2020.
- [14] 王肖梦. 基于声学的湿蒸汽湿度测量研究[D]. 北京: 华北电力大学, 2021.
- [15] ZHANG Guoqiang, YAN Yong, HU Yonghui, et al. On-line size measurement of pneumatically conveyed particles through acoustic emission sensing[J]. *Powder Technology*, 2019, 353: 195-201.
- [16] 宋志江, 胡尚锋, 李言钦. 基于定量分析的气固两相流声速模型综述[J]. *应用声学*, 2023, 42(1): 182-192.
SONG Zhijiang, HU Shangfeng, LI Yanqin. Review on sound speed models in gas-solid two-phase flow based on quantitative comparison[J]. *Journal of Applied Acoustics*, 2023, 42(1): 182-192.
- [17] 杜功焕, 朱哲民, 龚秀芬. 声学基础[M]. 南京: 南京大学出版社, 2012.
- [18] 程建春. 声学原理[M]. 北京: 科学出版社, 2019.
- [19] LANDAU L D, LIFSHITZ E M. Fluid mechanics: Landau and Lifshitz: course of theoretical physics, volume 6[M]. New York, USA: Pergamon Press, 1987.
- [12] ARPACI V S, GÖZÜM D. Thermal stability of radiating fluids; the Bénard problem[J]. *The Physics of Fluids*, 1973, 16(5): 581-588.
- [13] MODEST M F. Further development of the elliptic PDE formulation of the P_N approximation and its Marshak boundary conditions [J]. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, 2012, 62(2/3): 181-202.
- [14] ARSCOTT F M. Spherical Harmonics: an elementary treatise on harmonic functions with applications [J]. *The Mathematical Gazette*, 1969, 53(386): 452-453.
- [15] YANG Jun, MODEST M F. Elliptic PDE formulation of general, three-dimensional high-order P_N approximations for radiative transfer [J]. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 2007, 104(2): 217-227.
- [16] VARSHALOVICH D A, MOSKALEV A N, KHERSONSKII V K. Quantum theory of angular momentum[M]. Teaneck: World Scientific Publishing, 1987.
- [17] REN Tao, MODEST M F. A hybrid wavenumber selection scheme for line-by-line photon Monte Carlo simulations in high-temperature gases[J]. *Journal of Heat Transfer*, 2013, 135(8): 084501.
- [18] BARLOW R S. Proceedings of the international workshop on measurement and computation of turbulent nonpremixed flames[R]. Livermore: Sandia National Laboratories, 1996.
- [19] REN Tao, MODEST M F, HAWORTH D C. Simulating turbulence-radiation interactions using a presumed probability density function method[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2018, 121: 911-923.

(上接第9页)