

高位厚硬岩层破断力学机制分析

林韩祥¹, 冯雪峰¹, 张强勇¹, 段 抗², 张修峰³, 刘传成³, 陈长鹏¹, 赵 钰¹

(1. 山东大学 岩土与地下工程研究院, 山东 济南, 250061; 2. 山东大学 土建与水利学院, 山东 济南, 250061;
3. 山东能源集团有限公司 煤炭产业管理部, 山东 济南, 250101)

摘 要: 煤炭是我国的主体能源, 是国民经济的压舱石。内蒙古石拉乌素矿区因其特有的高位厚硬岩层赋存特征使得大能量矿震频发, 严重制约着煤炭安全开采。大能量矿震的诱因是高位厚硬岩层破断, 因此探明不良地质条件下高位厚硬岩层破断的力学机制已成为亟待解决的科技难题。以石拉乌素煤矿 1206A 工作面 and 1208 工作面为研究背景, 在 Reissner 厚板理论的基础上, 考虑自重应力场的影响, 推导了四边固支厚板的挠度、转角、剪力、弯矩和最大拉应力的解析计算公式; 考虑水平地应力场及其转移的影响, 建立了高位厚硬岩层破断判据, 并基于 MATLAB 平台编制了厚硬覆岩初次破断步距的计算程序。最终, 依托该程序系统研究了工作面宽度、覆岩厚度以及上覆荷载对厚硬覆岩初次破断步距的影响规律。

关 键 词: 大能量矿震; 高位厚硬岩层; Reissner 厚板理论; 水平地应力转移; 破断判据

中图分类号: TU 452

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598 (2025) 04-1264-14

Mechanical mechanism of the fracture of high thick-and-hard overburden strata

LIN Han-xiang¹, FENG Xue-feng¹, ZHANG Qiang-yong¹, DUAN Kang², ZHANG Xiu-feng³,
LIU Chuan-cheng³, CHEN Chang-peng¹, ZHAO Yu¹

(1. Institute of Geotechnical and Underground Engineering, Shandong University, Jinan, Shandong 250061, China; 2. School of Civil Engineering, Shandong University, Jinan, Shandong 250061, China; 3. Coal Industry Management Department, Shandong Energy Group Co., Ltd., Jinan, Shandong 250101, China)

Abstract: Coal serves as the primary energy source in China, playing a crucial role in maintaining national economic stability. Due to the characteristic of high thick-and-hard overburden strata, strong mine tremors occur frequently in Shilawusu coal mine in Inner Mongolia, which seriously restricts the safe mining of coal. The primary cause of strong mine tremors is the fracture of high thick-and-hard overburden strata, making it imperative to investigate the mechanical mechanism of such fractures under adverse geological conditions. The study is conducted using the 1206A and 1208 panels of the Shilawusu coal mine as the research context. On the basis of Reissner theory and considering the influence of gravity stress field, the analytical formulas of deflection, rotational angle, shear force, bending moment, and maximum tensile stress of the thick plate with fixed supports on four sides are derived. Considering the influence of horizontal ground stress field and its transfer, the breaking criterion of the high thick-and-hard overburden strata is established, and a MATLAB-based calculation program for determining the initial fracture step distance of such strata is developed. Finally, the program was used to systematically study the influence of the panel width, overburden strata thickness and overburden load on the initial fracture step distance of the thick-and-hard overburden strata.

Keywords: strong mine tremor; high thick-and-hard overburden strata; Reissner thick plate theory; horizontal ground stress transfer; the criterion of failure

收稿日期: 2024-06-30

录用日期: 2024-10-08

基金项目: 国家自然科学基金 (No.42172292); 泰山产业领军人才工程 (No.tscx202408130); 山东能源集团 2022 年揭榜挂帅项目 (No. SNKJ2022A01-R26)。

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (42172292), the Taishan Industrial Experts Program (tscx202408130) and the 2022 Key Challenge Initiative of Shandong Energy Group (SNKJ2022A01-R26).

第一作者简介: 林韩祥, 男, 1995 年生, 博士研究生, 主要从事深部采煤诱发矿震机制及防控技术研究工作。E-mail: linhanxiang0111@mail.sdu.edu.cn

通讯作者: 张强勇, 男, 1967 年生, 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事深部工程围岩稳定分析与灾变防控研究工作。E-mail: qiangyongz@sdu.edu.cn

1 引言

煤炭是我国能源安全的“压舱石”和“稳定器”,在我国能源消耗中占据主体地位。预计2050年,我国煤炭的需求量仍将高达38亿吨^[1]。我国煤炭开采不断向地球深部进军,受“三高一扰”影响,深部煤矿巷道大变形、冲击地压、矿震等动力灾害现象频发,严重威胁深部煤炭资源安全高效开采^[2]。我国山东、内蒙古、新疆和黑龙江等主要产煤地区大多有高位厚硬岩层赋存^[3],随着井下开采面积的不断增大,导致高位厚硬岩层破断诱发大能量矿震等动力现象频发,严重威胁人民生命财产安全并制约煤炭安全绿色开采。因此,实现大能量矿震事件的安全防控,关键是要揭示高位厚硬岩层破断的力学机制。

目前,国内外学者对岩层破断机制开展了相关研究,主要包括梁理论和板理论。在梁理论方面,钱鸣高^[4]、许家林^[5]、王家臣^[6]等基于铰接岩梁假说,提出了砌体梁理论,并进一步分析了砌体梁形成的平衡条件;宋振骐等^[7-8]提出了传递岩梁理论,严格定义了矿山压力和矿山压力显现的概念,并揭示了这两者之间的关系;史红等^[9]将坚硬岩层简化成两端嵌固梁模型,提出了大厚度坚硬岩层3种破坏方式的力学判断方法;鞠金峰等^[10]将工作面岩层关键层视为悬臂梁,基于悬臂梁与直接顶的作用揭示了端面漏冒的机制。相较于梁理论,板理论可以更好地反映岩层空间破坏特征,主要包括薄板理论和厚板理论。在薄板理论方面,王平等^[11]将坚硬岩层简化成弹性矩形薄板力学模型,研究水平地应力作用下薄板的极限垮落步距;宋彦琦等^[12]通过弹性小挠度弯曲理论,研究了三面环空的孤岛工作面基本顶的变形以及破断规律,得到了基本顶初次来压和周期来压步距的计算方法。不同于薄板理论,厚板理论考虑了横向剪切变形对板挠曲的影响,Mindlin^[13]、Reissner等^[14]提出的中厚板理论得到了广泛的应用。白贤栖等^[15]基于关键层理论,将岩层简化成厚板,采用Vlasov厚板理论来研究岩层结构演化规律及岩层内部活动特征,揭示了高位岩层运动诱发矿震机制;杨耀等^[16]采用Reissner厚板理论与相对矩张量反演方法,分析了工作面岩层破断运移规律,揭示了白垩系岩层深部煤层邻空采动强矿震孕育发生机制;钱鸣高等^[17]首次提出了关键层理论,是板理论发展过程中的重要里程碑。采用关键层理论对上覆岩层的载荷、破裂等进行研究,为岩层移动和采场矿压研究建立了一套统一的方法。

传统岩土工程问题的解析计算过程极为繁琐且十分容易出错。电子计算机的出现突破了这一瓶颈,大大提高了计算能力和准确率,计算力学的研究开始迅猛发展。李银山^[18]提出了一种解决梁弯曲变形问题的连续独立一体化积分法,可应用MAPLE软件编程快速求解梁结构内力和变形的解析表达式。杨胜利等^[19]对基本顶初次破断和周期破断进行了理论解析,最终利用MATLAB平台编程求解获得了赵固二矿14030工作面基本顶的变形和应力分布特征。邱凯等^[20]对内衬式储氢洞室群的隆起破坏机制进行了解析分析,采用MATLAB平台编程迭代计算获得了洞室极限内压和隆起破坏线。任明洋^[21]基于MATLAB平台开发了围岩-支护体系协同作用模型的计算分析程序,系统研究了考虑围岩-衬砌界面效应的影响。由此可见,计算机编程已成为解析计算的重要工具。

国内外学者已对覆岩破断运移规律和机制开展了大量研究并取得了丰硕的研究成果,但鲜见考虑岩层原岩自重应力场影响下的高位厚硬岩层破断机制的报道。鉴于此,本文首先在Reissner厚板理论的基础上,引入自重应力场的影响重新进行理论推导,获得了高位厚硬岩层的挠度、转角、弯矩、剪力和最大拉应力的解析计算公式;其次,考虑水平地应力场及其转移的影响,建立了高位厚硬岩层破断判据;最终,基于MATLAB平台编制了一套高位厚硬岩层初断步距计算程序,系统分析了工作面宽度、覆岩厚度和上覆荷载的对初断步距影响规律,研究成果可为煤矿安全开采提供一定的理论指导。

2 工程背景

2.1 工作面概况

石拉乌素煤矿位于鄂尔多斯市伊金霍洛旗内,井田呈梯形,南北长约7.35 km,东西长约9.40 km,总面积约70.64 km²。如图1所示,1208工作面位于采

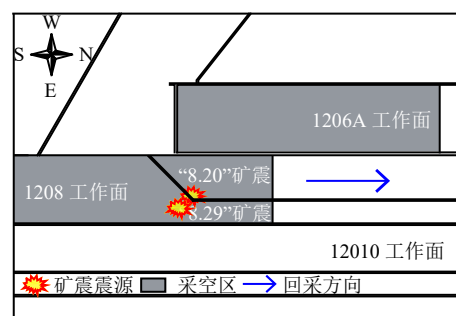


图1 工作面及大能量矿震相对位置示意图

Fig.1 Schematic diagram of relative position of the two panels and strong mine tremors

区南翼, 矿井中南部, 东侧为 1210 综放工作面, 西北侧为 1206A 综放工作面采空区, 1208 工作面宽度为 290 m, 走向长度为 3 238.7 m, 面积约 935 984.3 m², 回采 2-2 煤层, 为软~中等硬度煤层。

根据关键层理论^[17, 22], 基本顶可视为第 1 关键层, 自基本顶往上的第 m 层岩层与第 1 关键层协调变形, 而第 $m+1$ 层岩层不与之协调变形, 则第 $m+1$ 层岩层为第 2 关键层。由组合梁理论导出第 1 关键层上的载荷为

$$q_1(x)|_m = \frac{E_1 h_1^3 \sum_{i=1}^m \gamma_i h_i}{\sum_{i=1}^m E_i h_i^3} \quad (1)$$

式中: $q_1(x)|_m$ 为考虑到第 m 层岩层对第 1 关键层形成的载荷; E_i 、 h_i 、 γ_i 分别为各岩层弹性模量、厚度和重度 ($i=1, 2, \dots, m$)。

若第 $m+1$ 层岩层为第 2 关键层, 则其必然满足刚度条件:

$$q_1(x)|_{m+1} < q_1(x)|_m \quad (2)$$

同时满足强度条件, 即第 $m+1$ 层的破断步距要大于第 1 关键层的破断步距:

$$L_{m+1} + 2H_{m+1} \cot \beta > L_1 + 2H_1 \cot \beta \quad (3)$$

式中: L_{m+1} 、 L_1 分别为第 $m+1$ 层的破断步距和第 1 关键层的破断步距; H_{m+1} 、 H_1 分别为第 $m+1$ 层和第 1 关键层距离开采煤层的垂直距离。

各岩层的破断步距可按式计算:

$$L_i = h_i \sqrt{\frac{2\sigma_i}{q_i}} \quad (4)$$

式中: σ_i 和 q_i 分别为第 i 层关键层的抗拉强度和承受的载荷。

从第 1 关键层开始, 按上述方法确定第 2 关键层的位置, 并随即将第 2 关键层更名为第 1 关键层。以此类推, 可计算得到上覆岩层中的所有关键层。覆岩破断岩层移动角 β 为 77°^[16], 求得各关键层的破断步距、关键层判断结果如表 1 所示。

2.2 大能量矿震情况

对 1208 工作面回采过程中产生的微震事件进行统计分析表明: 在 2021 年 8 月 20 日产生了第 1 次 10⁵ J 的大能量事件, 为“8·20”矿震, 此时回采长度达到 2 390.05 m, 此前共发生能量大于 10⁴ J 的微震次数为 707 次, 其中有 706 次微震事件的能量为 10⁴~10⁵ J, 仅有本次事件的能量超过 10⁵ J, 微

震事件统计结果如图 2 所示。

“8·20”矿震发生后, 在 2021 年 8 月 29 日又发生一起能量大于 10⁵ J 的大能量矿震事件, 记为“8·29”矿震。其中, “8·20”矿震发生在 1208 工作面后 217.2 m, 辅运以里 179.8 m, 能量为 5.56×10⁵ J, 震级为 2.9 级; “8·29”矿震能量为 1.69×10⁵ J, 震级为 2.8 级, 面后 264.6 m, 胶运以里 57.2 m。这两次矿震发生时, 1208 工作面已回采到距 1206A 工作面切眼位置 289.9 m 处。“8·20”、“8·29”矿震的发生位置及波形图分别如图 1 和图 3 所示。

表 1 K55 钻孔岩层结构、物理力学参数及关键层判别结果
Table 1 Rock structure, physical and mechanical parameters of the K55 borehole and identification results of the key strata

岩层号	岩性	厚度 /m	重度 /(kN·m ⁻³)	抗拉强 度/MPa	弹性模 量/GPa	初次破断 步距/m	关键层判别 结果
1	表土	14.80	23.0	0.0	0.0	—	—
2	细粒砂岩	14.13	23.0	0.6	2.2	—	—
3	砂质泥岩	2.50	23.0	0.6	2.2	—	—
4	细粒砂岩	13.60	23.0	0.6	2.2	—	—
5	砂质泥岩	3.41	23.0	0.6	2.2	—	—
6	细粒砂岩	28.01	23.0	1.1	2.2	—	—
7	粉砂岩	30.87	22.0	1.1	4.1	—	—
8	中粒砂岩	35.66	22.0	1.1	4.1	—	—
9	细粒砂岩	36.23	22.0	1.1	4.3	—	—
10	粉砂岩	20.49	22.0	0.8	8.0	—	—
11	细粒砂岩	19.96	22.0	0.8	8.0	—	—
12	中粒砂岩	28.13	22.0	0.8	8.0	—	—
13	细粒砂岩	26.02	22.0	0.8	8.0	—	—
14	中粒砂岩	33.79	22.0	0.8	8.0	194.58	主关键层
15	砂质泥岩	6.20	22.0	0.7	6.6	—	—
16	中粒砂岩	22.05	22.0	0.7	6.6	—	—
17	砂质泥岩	8.11	22.0	0.7	6.6	—	—
18	粉砂岩	10.19	22.0	0.7	6.6	—	—
19	中粒砂岩	30.59	23.0	2.0	12.7	176.61	亚关键层 4
20	砂质泥岩	12.15	24.3	5.7	12.7	—	—
21	细粒砂岩	19.02	24.3	5.7	12.7	—	—
22	砂质泥岩	14.53	24.3	5.7	12.7	—	—
23	细粒砂岩	5.19	24.3	5.7	12.7	—	—
24	砂质泥岩	41.24	24.0	2.9	14.2	153.92	亚关键层 3
25	细粒砂岩	3.20	23.0	1.7	13.5	—	—
26	砂质泥岩	11.52	23.0	1.7	13.0	—	—
27	细粒砂岩	18.89	23.0	1.7	13.5	—	—
28	粉砂岩	10.34	23.0	1.7	13.1	—	—
29	砂质泥岩	15.37	23.0	1.9	13.1	—	—
30	粉砂岩	10.16	23.0	1.9	13.1	—	—
31	砂质泥岩	26.38	23.0	1.8	12.6	—	—
32	中粒砂岩	26.12	23.0	2.0	13.1	78.29	亚关键层 2
33	粉砂岩	12.86	23.0	1.7	14.1	—	—
34	砂质泥岩	12.77	23.0	1.9	15.0	—	—
35	细粒砂岩	31.05	23.0	1.7	14.4	53.59	亚关键层 1
36~40	2-2 煤层	10.60	18.5	1.5	3.3	—	—

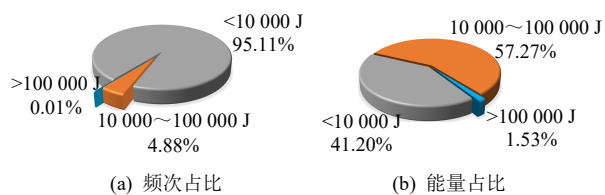
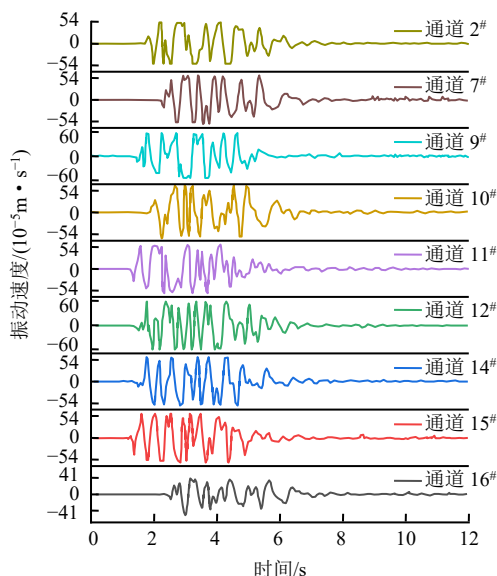
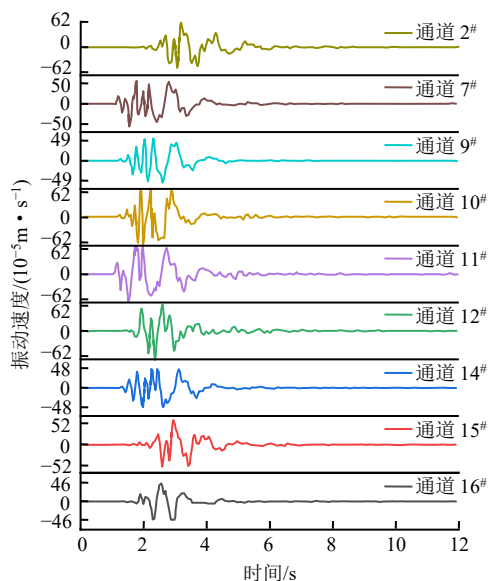


图2 微震事件统计结果

Fig.2 Statistical results of microseismic events



(a) “8·20”强矿震波形



(b) “8·29”强矿震波形

图3 1208工作面强矿震波形图^[23]Fig.3 Waveforms of the strong mine tremors at the 1208 panel^[23]

根据现场报告,石拉乌素煤矿1208工作面岩层包含4个亚关键层和1个主关键层。钻孔电视以及微震监测结果表明^[23]:当1208工作面未回采到1206A切眼位置时,破裂仅发展到亚关键层4,此时主关键层并未发生破裂;当1208工作面进入沿空

开采后,1208工作面与1206A工作面即贯通(中间5m窄煤柱可忽略不计),工作面倾向方向长度由原来的289m突变到600m,并且当1208工作面回采至单工作面见方(289.9m)时,主关键层发生了首次O-X破断,先后诱发“8·20”、“8·29”两次大能量矿震事件。

3 考虑自重应力影响的高位厚硬岩层力学模型

3.1 高位厚硬岩层力学模型假设

石拉乌素煤矿的岩层分布如图4所示。在距离2-2煤层顶板上方348.4m的砂岩组形成复合主关键层,主关键层组厚度 $h=259.4$ m,属于高位厚硬岩层。因其破断机制较为复杂,本文采用板理论对其进行分析。根据厚宽比的不同,可将板划分为厚板和薄板^[24],判断标准为

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{1}{100} \sim \frac{1}{80} \right) &\leq \frac{h}{b} \leq \left(\frac{1}{8} \sim \frac{1}{5} \right), \text{ 薄板} \\ \frac{h}{b} &> \left(\frac{1}{8} \sim \frac{1}{5} \right), \text{ 厚板} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中: h 为覆岩厚度; b 为工作面宽度。

1208和1206A贯通后双工作面宽度总和约为 $b=600$ m。显然,主关键层的厚宽比为0.43,满足式(1)中的厚板判断条件。因此,石拉乌素煤矿主关键层属于厚板,应采用厚板相关理论对其破断机制进行研究。

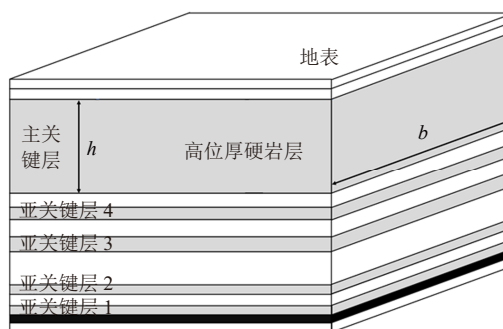


图4 石拉乌素煤矿岩层分布示意图

Fig.4 Rock strata distribution diagram of the Shilawusu coal mine

随着工作面不断向前推进,岩层将自下而上渐次向上破断垮落至高位厚硬岩层底面。因此,高位厚硬岩层初次破断之前,四周均为实体岩层支撑,将主关键层假设为四边固支^[19]。高位厚硬覆岩受力及边界条件如图5所示。其中, dx 、 dy 、 h 分别为高位厚硬覆岩中由 x 和 y 面切割而成的平行六面体

单元的长度、宽度和高。 xoy 坐标系的原点设置于单元体的中性层与其侧棱的交点, z 轴竖直向下, 符合右手坐标系。 q 为上覆荷载。 $(\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz})$ 、 $(\sigma_y, \tau_{yx}, \tau_{yz})$ 、 $(\sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{zy})$ 分别为单元体 x 、 y 、 z 面上的一组正应力与剪应力; (M_x, Q_x, M_{xy}) 、 (M_y, Q_y, M_{yx}) 分别为单元体 x 、 y 面上的弯矩、剪力和扭矩, 方向符合弹性力学约定。

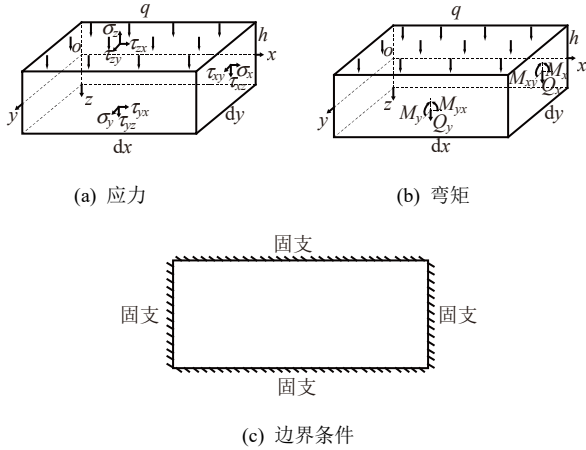


图5 高位厚硬岩层受力分析及边界条件示意图

Fig.5 Schematic diagrams of stress, bending moment, and boundary condition analysis for high thick-and-hard overlying strata

采用 Reissner 厚板理论分析高位厚硬岩层破断运移特征, 基本假设如下^[25]:

- (1) 正应力分量沿板厚度方向呈现直线分布, 并在中面上为 0。
- (2) 横向剪应力沿板的厚度方向呈现二次抛物线分布。
- (3) 任一横截面上内力在其相应的平均位移上做的功等于同一截面上应力分量在相应的实际位移分量上做的功, 平均位移与实际位移关系如下:

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{3}{2h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} w' \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] dz \\ \varphi_x &= \frac{12}{h^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} u' \frac{z}{h} dz \\ \varphi_y &= \frac{12}{h^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} v' \frac{z}{h} dz \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式中: h 为板的厚度; w 为沿厚板的平均挠度; φ_x 、 φ_y 分别为厚板 x 、 y 面的转角平均值; u' 、 v' 分别为厚板 x 、 y 方向的实际位移分量; w' 为厚板的实际挠度。

3.2 高位厚硬岩层力学模型解析

根据弹性力学, 考虑自重应力的影响, 厚硬岩

层的平衡微分方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + f_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中: f_x 、 f_y 、 f_z 分别为厚板的 x 、 y 、 z 方向的体力分量, 即 $f_x=0$, $f_y=0$, $f_z=\rho g$, ρ 为厚板的密度, g 为重力加速度。

根据文献[14], 可得

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{Q_x}{2h/3} \left[1 - \left(\frac{z}{h/2} \right)^2 \right] \\ \tau_{yz} &= \frac{Q_y}{2h/3} \left[1 - \left(\frac{z}{h/2} \right)^2 \right] \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

横向剪力 Q_x 、 Q_y 满足:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -q \quad (9)$$

将式 (8)、(9) 代入平衡微分方程 (7), 可得

$$\sigma_z = \frac{3}{4} q \left[\frac{z}{h/2} - \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{z}{h/2} \right)^3 \right] - \rho g \left(z + \frac{h}{2} \right) \quad (10)$$

根据厚板的物理方程可得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon'_x + \nu \varepsilon'_y) + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon'_y + \nu \varepsilon'_x) + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式中: E 为厚板的弹性模量; ν 为厚板的泊松比; ε'_x 、 ε'_y 分别为厚板的 x 、 y 方向的实际应变。

将式 (10) 代入式 (11), 可得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \nu \frac{\partial v'}{\partial y} \right) + \frac{\nu}{1-\nu} \cdot \left\{ \frac{3}{4} q \left[\frac{z}{h/2} - \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{z}{h/2} \right)^3 \right] - \rho g \left(z + \frac{h}{2} \right) \right\} \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v'}{\partial y} + \nu \frac{\partial u'}{\partial x} \right) + \frac{\nu}{1-\nu} \cdot \left\{ \frac{3}{4} q \left[\frac{z}{h/2} - \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{z}{h/2} \right)^3 \right] - \rho g \left(z + \frac{h}{2} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

厚板弯矩满足:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz \\ M_y &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z dz \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

将式(12)代入式(13), 可得

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \nu \frac{\partial v'}{\partial y} \right) z dz - \frac{h^2}{10} \frac{\nu q}{1-\nu} - \frac{h^2}{12} \frac{pv}{1-\nu} \\ M_y &= \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{\partial v'}{\partial y} + \nu \frac{\partial u'}{\partial x} \right) z dz - \frac{h^2}{10} \frac{\nu q}{1-\nu} - \frac{h^2}{12} \frac{pv}{1-\nu} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

式中: p 为自重应力, $p=\gamma h$ 。

将式(6)代入式(14), 可得考虑自重应力的厚板弯矩计算方程:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right) - \frac{h^2}{10} \frac{\nu q}{1-\nu} - \frac{h^2}{12} \frac{pv}{1-\nu} \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right) - \frac{h^2}{10} \frac{\nu q}{1-\nu} - \frac{h^2}{12} \frac{pv}{1-\nu} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式中: D 为板的弯曲刚度, $D=Eh^3/[12(1-\nu^2)]$ 。

根据文献[26], 横向剪力 Q_x 、 Q_y , 应力函数 Ψ , 厚板的转角以及仅含挠度 w 的方程, 可分别表示为

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ Q_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w) - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\Psi - \frac{h^2}{10} \nabla^2 \Psi = 0 \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_x &= -\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{12}{5} \frac{1+\nu}{Eh} Q_x \\ \varphi_y &= -\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{12}{5} \frac{1+\nu}{Eh} Q_y \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = q - \frac{h^2}{10} \frac{2-\nu}{1-\nu} \nabla^2 q \quad (19)$$

将式(18)代入式(15), 可以得到用挠度 w 表示的厚板弯矩计算方程:

$$w^0 = \sum_{m=1}^{\infty} (B_m \operatorname{sh} \alpha_m y + C_m \alpha_m y \operatorname{ch} \alpha_m y + D_m \alpha_m y \operatorname{sh} \alpha_m y) \sin \alpha_m x + \sum_{n=1}^{\infty} (F_n \operatorname{sh} \beta_n x + G_n \beta_n x \operatorname{ch} \beta_n x + H_n \beta_n x \operatorname{sh} \beta_n x) \sin \beta_n y \quad (27)$$

式中: 系数 B_m 、 C_m 、 D_m 、 F_n 、 G_n 、 H_n 为待定常数。

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{h^2}{5} \frac{\partial Q_x}{\partial x} - \frac{h^2}{10} \frac{\nu q}{1-\nu} - \frac{h^2}{12} \frac{pv}{1-\nu} \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{h^2}{5} \frac{\partial Q_y}{\partial y} - \frac{h^2}{10} \frac{\nu q}{1-\nu} - \frac{h^2}{12} \frac{pv}{1-\nu} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

四边固支的厚板的边界条件为

$$\left. \begin{aligned} w|_{x=0,a} &= 0, w|_{y=0,b} = 0 \\ \varphi_x|_{x=0,a} &= 0, \varphi_y|_{y=0,b} = 0 \\ \varphi_y|_{x=0,a} &= 0, \varphi_x|_{y=0,b} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

为求解式(19), 可将挠度 w 表示为特解 w^* 和齐次解 w^0 的形式:

$$w = w^* + w^0 \quad (22)$$

可将 q 展开成三角级数形式, 根据边界条件式(21), q 可展开为

$$q = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \quad (23)$$

式中: 系数 Q_{mn} 为待定常数; $\alpha_m = \frac{m\pi}{a}$; $\beta_n = \frac{n\pi}{b}$ 。

将挠度特解 w^* 也表示为三角级数形式:

$$w^* = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \quad (24)$$

式中: 系数 C_{mn} 为待定常数。

将式(23)、(24)代入式(19), 可得

$$C_{mn} = \frac{Q_{mn} \left[1 + \frac{h^2}{10} \frac{2-\nu}{1-\nu} (\alpha_m^2 + \beta_n^2) \right]}{D (\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2} \quad (25)$$

挠度齐次通解满足重调和方程:

$$\nabla^2 \nabla^2 w^0 = 0 \quad (26)$$

采用分离变量的方法, 并考虑边界条件以及对称性, 可得齐次解^[26]:

因此, 板的挠度可表示为

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y + \sum_{m=1}^{\infty} (B_m \operatorname{sh} \alpha_m y + C_m \alpha_m y \operatorname{ch} \alpha_m y + D_m \alpha_m y \operatorname{sh} \alpha_m y) \cdot \sin \alpha_m x + \sum_{n=1}^{\infty} (F_n \operatorname{sh} \beta_n x + G_n \beta_n x \operatorname{ch} \beta_n x + H_n \beta_n x \operatorname{sh} \beta_n x) \sin \beta_n y \quad (28)$$

应力函数也采用分离变量的方法, 可以表示为

$$\Psi(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} (I_m \operatorname{sh} \gamma_m y + J_m \operatorname{ch} \gamma_m y) \cos \alpha_m x + \sum_{n=0}^{\infty} (K_n \operatorname{sh} \delta_n x + L_n \operatorname{ch} \delta_n x) \cos \beta_n y \quad (29)$$

式中: 系数 I_m 、 J_m 、 K_n 、 L_n 为待定常数;

$$\gamma_m = \sqrt{\alpha_m^2 + \frac{10}{h^2}}; \quad \delta_n = \sqrt{\beta_n^2 + \frac{10}{h^2}}.$$

将式 (28)、(29) 代入式 (16), 可得到横向剪力 Q_x 、 Q_y 的方程为

$$Q_x(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_m Q_{mn}}{\alpha_m^2 + \beta_n^2} \cos \alpha_m x \sin \beta_n y - 2D \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^3 (C_m \operatorname{sh} \alpha_m y + D_m \operatorname{ch} \alpha_m y) \cos \alpha_m x - 2D \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^3 (G_n \operatorname{ch} \beta_n x + H_n \operatorname{sh} \beta_n x) \sin \beta_n y + \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m (I_m \operatorname{ch} \gamma_m y + J_m \operatorname{sh} \gamma_m y) \cos \alpha_m x - \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n (K_n \operatorname{sh} \delta_n x + L_n \operatorname{ch} \delta_n x) \sin \beta_n y \quad (30)$$

$$Q_y(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n Q_{mn}}{\alpha_m^2 + \beta_n^2} \sin \alpha_m x \cos \beta_n y - 2D \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^3 (C_m \operatorname{ch} \alpha_m y + D_m \operatorname{sh} \alpha_m y) \sin \alpha_m x - 2D \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^3 (G_n \operatorname{sh} \beta_n x + H_n \operatorname{ch} \beta_n x) \cos \beta_n y + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m (I_m \operatorname{sh} \gamma_m y + J_m \operatorname{ch} \gamma_m y) \sin \alpha_m x - \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n (K_n \operatorname{ch} \delta_n x + L_n \operatorname{sh} \delta_n x) \cos \beta_n y \quad (31)$$

将式 (28)、(30)、(31) 代入式 (18) 中, 可求出转角计算方程为

$$\begin{aligned} \varphi_x(x, y) = & - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_{mn} \alpha_m - \frac{h^2}{5D(1-\nu)} \frac{\alpha_m Q_{mn}}{\alpha_m^2 + \beta_n^2} \right] \cdot \\ & \cos \alpha_m x \sin \beta_n y - \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \left\{ B_m \operatorname{sh} \alpha_m y + \right. \\ & C_m \left[\alpha_m y \operatorname{ch} \alpha_m y + \frac{2h^2 \alpha_m^2}{5(1-\nu)} \operatorname{sh} \alpha_m y \right] + \\ & D_m \left[\alpha_m y \operatorname{sh} \alpha_m y + \frac{2h^2 \alpha_m^2}{5(1-\nu)} \operatorname{ch} \alpha_m y \right] \left\{ \cos \alpha_m x + \right. \\ & \frac{h^2}{5D(1-\nu)} \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m (I_m \operatorname{ch} \gamma_m y + J_m \operatorname{sh} \gamma_m y) \cos \alpha_m x - \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \left\{ F_n \operatorname{ch} \beta_n x + G_n \left[\beta_n x \operatorname{sh} \beta_n x + \left(1 + \frac{2h^2 \beta_n^2}{5(1-\nu)} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. \operatorname{ch} \alpha_m y \right] + H_n \left[\beta_n x \operatorname{ch} \beta_n x + \left(1 + \frac{2h^2 \beta_n^2}{5(1-\nu)} \right) \operatorname{sh} \beta_n x \right] \right\} \cdot \\ & \sin \beta_n y - \frac{h^2}{5D(1-\nu)} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n (K_n \operatorname{sh} \delta_n x + L_n \operatorname{ch} \delta_n x) \cdot \sin \beta_n y \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \varphi_y(x, y) = & - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_{mn} \beta_n - \frac{h^2}{5D(1-\nu)} \frac{\beta_n Q_{mn}}{\alpha_m^2 + \beta_n^2} \right] \cdot \\ & \sin \alpha_m x \cos \beta_n y - \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \left\{ B_m \operatorname{ch} \alpha_m y + C_m \cdot \right. \\ & \left[\alpha_m y \operatorname{sh} \alpha_m y + \left(1 + \frac{2h^2 \alpha_m^2}{5(1-\nu)} \right) \operatorname{ch} \beta_n x \right] + D_m \cdot \\ & \left[\alpha_m y \operatorname{ch} \alpha_m y + \left(1 + \frac{2h^2 \alpha_m^2}{5(1-\nu)} \right) \operatorname{sh} \alpha_m y \right] \left\{ \sin \alpha_m x + \right. \\ & \frac{h^2}{5D(1-\nu)} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m (I_m \operatorname{sh} \gamma_m y + J_m \operatorname{ch} \gamma_m y) \sin \alpha_m x - \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \left\{ F_n \operatorname{sh} \beta_n x + G_n \left[\beta_n x \operatorname{ch} \beta_n x + \frac{2h^2 \beta_n^2}{5(1-\nu)} \operatorname{sh} \beta_n x \right] + \right. \\ & H_n \left[\beta_n x \operatorname{sh} \beta_n x + \frac{2h^2 \beta_n^2}{5(1-\nu)} \operatorname{ch} \beta_n x \right] \left\{ \cos \beta_n y - \right. \\ & \frac{h^2}{5D(1-\nu)} \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n (K_n \operatorname{ch} \delta_n x + L_n \operatorname{sh} \delta_n x) \cos \beta_n y \end{aligned} \quad (33)$$

将自重应力 p 也展开成三角级数:

$$p = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{mn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \quad (34)$$

式中: 系数 P_{mn} 为待定常数。

将式 (23)、(28)、(30)、(31)、(34) 代入式 (20), 可得弯矩表达式:

$$\begin{aligned}
M_x(x, y) = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[DC_{mn} (\alpha_m^2 + \nu \beta_n^2) - \frac{h^2}{5} \frac{\alpha_m^2 Q_{mn}}{\alpha_m^2 + \beta_n^2} - \frac{\nu h^2 Q_{mn}}{10(1-\nu)} - \frac{\nu h^2 P_{mn}}{12(1-\nu)} \right] \sin \alpha_m x \sin \beta_n y + \\
& D \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^2 \left\{ B_m (1-\nu) \operatorname{sh} \alpha_m y + C_m \left[(1-\nu) \alpha_m y \operatorname{ch} \alpha_m y - 2 \left(\nu - \frac{h^2 \alpha_m^2}{5} \right) \operatorname{sh} \alpha_m y \right] + D_m \left[(1-\nu) \alpha_m y \operatorname{sh} \alpha_m y - \right. \right. \\
& \left. \left. 2 \left(\nu - \frac{h^2 \alpha_m^2}{5} \right) \operatorname{ch} \alpha_m y \right] \right\} \sin \alpha_m x - D \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2 \left\{ F_n (1-\nu) \sinh \beta_n x + G_n \left[(1-\nu) \beta_n x \operatorname{ch} \beta_n x + 2 \left(1 + \frac{h^2 \beta_n^2}{5} \right) \operatorname{sh} \beta_n x \right] + \right. \\
& \left. H_n \left[(1-\nu) \beta_n x \operatorname{sh} \beta_n x + 2 \left(1 + \frac{h^2 \beta_n^2}{5} \right) \operatorname{ch} \beta_n x \right] \right\} \sin \beta_n y - \frac{h^2}{5} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \gamma_m (I_m \operatorname{ch} \gamma_m y + J_m \operatorname{sh} \gamma_m y) \sin \alpha_m x - \\
& \frac{h^2}{5} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \delta_n (K_n \operatorname{ch} \delta_n x + L_n \operatorname{sh} \delta_n x) \sin \beta_n y
\end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned}
M_y(x, y) = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[DC_{mn} (\beta_n^2 + \nu \alpha_m^2) - \frac{h^2}{5} \frac{\beta_n^2 Q_{mn}}{\alpha_m^2 + \beta_n^2} - \frac{\nu h^2 Q_{mn}}{10(1-\nu)} - \frac{\nu h^2 P_{mn}}{12(1-\nu)} \right] \sin \alpha_m x \sin \beta_n y - D \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^2 \left\{ B_m (1-\nu) \operatorname{sh} \alpha_m y + \right. \\
& C_m \left[(1-\nu) \alpha_m y \operatorname{ch} \alpha_m y + 2 \left(1 + \frac{h^2 \alpha_m^2}{5} \right) \operatorname{sh} \alpha_m y \right] + D_m \left[(1-\nu) \alpha_m y \operatorname{sh} \alpha_m y + 2 \left(1 + \frac{h^2 \alpha_m^2}{5} \right) \operatorname{ch} \alpha_m y \right] \left. \right\} \sin \alpha_m x + D \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2 \cdot \\
& \left\{ F_n (1-\nu) \operatorname{sh} \beta_n x + G_n \left[(1-\nu) \beta_n x \operatorname{ch} \beta_n x - 2 \left(\nu - \frac{h^2 \beta_n^2}{5} \right) \operatorname{sh} \beta_n x \right] + H_n \left[(1-\nu) \beta_n x \operatorname{sh} \beta_n x - 2 \left(\nu - \frac{h^2 \beta_n^2}{5} \right) \operatorname{ch} \beta_n x \right] \right\} \cdot \\
& \sin \beta_n y + \frac{h^2}{5} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \gamma_m (I_m \operatorname{ch} \gamma_m y + J_m \operatorname{sh} \gamma_m y) \sin \alpha_m x + \frac{h^2}{5} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \delta_n (K_n \operatorname{ch} \delta_n x + L_n \operatorname{sh} \delta_n x) \sin \beta_n y
\end{aligned} \quad (36)$$

厚板的下表面中心 ($x=a/2, y=b/2$) 处有最大拉应力, 满足^[27]:

$$\sigma_{t\max} = \frac{6M_{\max}}{h^2} \quad (37)$$

式中: $\sigma_{t\max}$ 为厚板的最大拉应力; $M_{\max}$ 为厚板的最大弯矩。

将式 (35)、(36) 代入式 (37), 并取 $m=n=1$, 可得 $x、y$ 方向最大拉应力计算方程:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xt\max} = & \frac{6}{h^2} \left[DC_{11} (\alpha_1^2 + \nu \beta_1^2) - \frac{h^2}{5} \frac{\alpha_1^2 Q_{11}}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} - \frac{\nu h^2 Q_{11}}{10(1-\nu)} - \frac{\nu h^2 P_{11}}{12(1-\nu)} \right] + \frac{6}{h^2} D \alpha_1^2 \left\{ B_1 (1-\nu) \operatorname{sh} \alpha_1 \frac{b}{2} + \right. \\
& C_1 \left[(1-\nu) \alpha_1 \frac{b}{2} \operatorname{ch} \alpha_1 \frac{b}{2} - 2 \left(\nu - \frac{h^2 \alpha_1^2}{5} \right) \operatorname{sh} \alpha_1 \frac{b}{2} \right] + D_1 \left[(1-\nu) \alpha_1 \frac{b}{2} \operatorname{sh} \alpha_1 \frac{b}{2} - 2 \left(\nu - \frac{h^2 \alpha_1^2}{5} \right) \operatorname{ch} \alpha_1 \frac{b}{2} \right] \left. \right\} - \\
& \frac{6}{h^2} D \beta_1^2 \left\{ F_1 (1-\nu) \operatorname{sh} \beta_1 \frac{a}{2} + G_1 \left[(1-\nu) \beta_1 \frac{a}{2} \operatorname{ch} \beta_1 \frac{a}{2} + 2 \left(1 + \frac{h^2 \beta_1^2}{5} \right) \operatorname{sh} \beta_1 \frac{a}{2} \right] + H_1 \left[(1-\nu) \beta_1 \frac{a}{2} \operatorname{sh} \beta_1 \frac{a}{2} + \right. \right. \\
& \left. \left. 2 \left(1 + \frac{h^2 \beta_1^2}{5} \right) \operatorname{ch} \beta_1 \frac{a}{2} \right] \right\} - \frac{6}{5} \alpha_1 \gamma_1 \left(I_1 \operatorname{ch} \gamma_1 \frac{b}{2} + J_1 \operatorname{sh} \gamma_1 \frac{b}{2} \right) - \frac{6}{5} \beta_1 \delta_1 \left(K_1 \operatorname{ch} \delta_1 \frac{a}{2} + L_1 \operatorname{sh} \delta_1 \frac{a}{2} \right)
\end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{yt\max} = & \frac{6}{h^2} \left[DC_{11} (\beta_1^2 + \nu \alpha_1^2) - \frac{h^2}{5} \frac{\beta_1^2 Q_{11}}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} - \frac{\nu h^2 Q_{11}}{10(1-\nu)} - \frac{\nu h^2 P_{11}}{12(1-\nu)} \right] - \frac{6}{h^2} D \alpha_1^2 \left\{ B_1 (1-\nu) \operatorname{sh} \alpha_1 \frac{b}{2} + \right. \\
& C_1 \left[(1-\nu) \alpha_1 \frac{b}{2} \operatorname{ch} \alpha_1 \frac{b}{2} + 2 \left(1 + \frac{h^2 \alpha_1^2}{5} \right) \operatorname{sh} \alpha_1 \frac{b}{2} \right] + D_1 \left[(1-\nu) \alpha_1 \frac{b}{2} \operatorname{sh} \alpha_1 \frac{b}{2} + 2 \left(1 + \frac{h^2 \alpha_1^2}{5} \right) \operatorname{ch} \alpha_1 \frac{b}{2} \right] \left. \right\} + \\
& \frac{6}{h^2} D \beta_1^2 \left\{ F_1 (1-\nu) \operatorname{sh} \beta_1 \frac{a}{2} + G_1 \left[(1-\nu) \beta_1 \frac{a}{2} \operatorname{ch} \beta_1 \frac{a}{2} - 2 \left(\nu - \frac{h^2 \beta_1^2}{5} \right) \operatorname{sh} \beta_1 \frac{a}{2} \right] + H_1 \left[(1-\nu) \beta_1 \frac{a}{2} \operatorname{sh} \beta_1 \frac{a}{2} - \right. \right. \\
& \left. \left. 2 \left(\nu - \frac{h^2 \beta_1^2}{5} \right) \operatorname{ch} \beta_1 \frac{a}{2} \right] \right\} + \frac{6}{5} \alpha_1 \gamma_1 \left(I_1 \operatorname{ch} \gamma_1 \frac{b}{2} + J_1 \operatorname{sh} \gamma_1 \frac{b}{2} \right) + \frac{6}{5} \beta_1 \delta_1 \left(K_1 \operatorname{ch} \delta_1 \frac{a}{2} + L_1 \operatorname{sh} \delta_1 \frac{a}{2} \right)
\end{aligned} \quad (39)$$

式 (28)、(30) ~ (33)、(35)、(36) 为考虑自重应力的高位厚硬岩层的解析公式。为求解未知

参数 $B_1 \sim L_1$, 可将式 (28)、(32)、(33) 代入式 (21), 简化为矩阵式 (40) 以便于 MATLAB 编程求解。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & T_0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -O_1 & O_2 & O_3 & -\beta_1 & -O_6 & 0 & O_4 & O_5 & 0 & -O_7 \\ -\alpha_1 & -X_6 & 0 & -X_1 & X_2 & X_4 & 0 & X_7 & -X_4 & -X_5 \\ A_0 & \alpha_1 b A_2 & \alpha_1 b A_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_1 & \beta_1 a A_3 & \beta_1 a A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_0 & Y_0 & Y_1 & 0 & 0 & 0 & -Y_2 A_6 & -Y_2 A_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_1 & Z_0 & Z_1 & 0 & 0 & -Z_2 A_7 & -Z_2 A_5 \\ \alpha_1 A_2 & P_0 & P_1 & -P_3 & X_2 & X_3 & P_2 A_4 & P_2 A_6 & -P_4 (A_7 + 1) & -P_4 A_5 \\ -Q_3 & O_2 & O_3 & \beta_1 A_3 & Q_0 & Q_1 & -Q_4 (A_6 + 1) & -Q_4 A_4 & Q_2 A_5 & Q_2 A_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ C_1 \\ D_1 \\ F_1 \\ G_1 \\ H_1 \\ I_1 \\ J_1 \\ K_1 \\ L_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ O_0 \\ X_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ X_0 \\ O_0 \end{bmatrix} \quad (40)$$

式中: $A_0 = \text{sh}\alpha_1 b$, $A_1 = \text{sh}\beta_1 a$, $A_2 = \text{ch}\alpha_1 b$, $A_3 = \text{ch}\beta_1 a$, $A_4 = \text{sh}\gamma_1 b$, $A_5 = \text{sh}\delta_1 a$, $A_6 = \text{ch}\gamma_1 b$, $A_7 = \text{ch}\delta_1 a$, $T_0 = 2D(\alpha_1)^3/\gamma_1$, $R_0 = -2D(\beta_1)^3/\delta_1$, $R_1 = h^2/[5(1-\nu)]$, $R_2 = 2\alpha_1\beta_1/[(\alpha_1)^2 + (\beta_1)^2]$, $O_0 = C_{11}\alpha_1 - R_1\alpha_1 Q_{11}/[D((\alpha_1)^2 + (\beta_1)^2)]$, $O_1 = R_2 A_0/b$, $O_2 = (R_2/b)[- \alpha_1 b A_2 + 2(\alpha_1)^2 A_0/((\alpha_1)^2 + (\beta_1)^2) - 2R_1(\alpha_1)^2 A_0]$, $O_3 = (R_2/b)[- \alpha_1 b A_0 + 2(\alpha_1)^2 (A_2 + 1)/((\alpha_1)^2 + (\beta_1)^2) - 2R_1(\alpha_1)^2 (A_2 + 1)]$, $O_4 = 2R_1\beta_1\gamma_1(A_6 + 1)/[Db((\gamma_1)^2 + (\beta_1)^2)]$, $O_5 = 2R_1\beta_1\gamma_1 A_4/[Db((\gamma_1)^2 + (\beta_1)^2)]$, $O_6 = \beta_1(1 + 2R_1(\beta_1)^2)$, $O_7 = R_1\beta_1/D$, $X_0 = C_{11}\beta_1 - R_1\beta_1 Q_{11}/[D((\alpha_1)^2 + (\beta_1)^2)]$, $X_1 = R_2 A_1/a$, $X_2 = (R_2/a)[- \beta_1 a A_3 + A_1/(2(\beta_1)^2/((\alpha_1)^2 + (\beta_1)^2)) - 2R_1(\beta_1)^2]$, $X_3 = (R_2/a)[- \beta_1 a A_1 + (2(\beta_1)^2/((\alpha_1)^2 + (\beta_1)^2) - 2R_1(\beta_1)^2)(A_3 + 1)]$, $X_4 = 2\alpha_1\delta_1 R_1(A_7 + 1)/[Da((\alpha_1)^2 + (\beta_1)^2)]$, $X_5 = 2\alpha_1\delta_1 R_1 A_5/[Da((\alpha_1)^2 + (\delta_1)^2)]$, $X_6 = \alpha_1(1 + 2R_1(\alpha_1)^2)$, $X_7 = \alpha_1 R_1/D$, $Z_0 = \beta_1 a A_3 + 2R_1(\beta_1)^2 A_1$, $Z_1 = \beta_1 a A_1 + 2R_1(\beta_1)^2 A_3$, $Z_2 = R_1\delta_1/D\beta_1$, $Y_0 = \alpha_1 b A_2 + 2R_1(\alpha_1)^2 A_0$, $Y_1 = \alpha_1 b A_0 + 2R_1(\alpha_1)^2 A_2$, $Y_2 = R_1\gamma_1/D\alpha_1$, $P_0 = \alpha_1[\alpha_1 b A_0 + A_2(1 + 2R_1(\alpha_1)^2)]$, $P_1 = \alpha_1[\alpha_1 b A_2 + A_0(1 + 2R_1(\alpha_1)^2)]$, $P_2 = R_1\alpha_1/D$, $P_3 = R_2 A_1/a$, $P_4 = 2\alpha_1\delta_1 R_1/[Da((\alpha_1)^2 + (\delta_1)^2)]$, $Q_0 = \beta_1[(1 + 2R_1(\beta_1)^2)A_3 + \beta_1 a A_1]$, $Q_1 = \beta_1[(1 + 2R_1(\beta_1)^2)A_1 + \beta_1 a A_3]$, $Q_2 = R_1\beta_1/D$, $Q_3 = R_2 A_0/b$, $Q_4 = 2\beta_1\gamma_1 R_1/[Db((\beta_1)^2 + (\gamma_1)^2)]$ 。

3.3 高位厚硬岩层初次破断判据

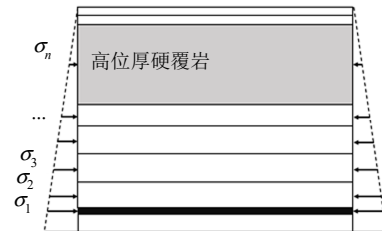
假设随煤层回采的进行, 顶板岩层自下而上渐次发生破断。设煤层顶部第 i 层岩层的厚度为 H_i , 初始水平地应力为 σ_i , 且底部岩层破裂释放的水平应力只会向相邻的岩层转移和集中 (见图 6)。若假设第 1, 2, 3, ..., n 层岩层破断后的水平应力转移系数分别为 $N_1, N_2, N_3, \dots, N_n$, 第 2, 3, ..., n 层岩层下部岩层破断后本岩层水平构造应力变为 $\sigma'_2, \sigma'_3, \dots, \sigma'_n$ 。

根据上述分析, 发生转移后的岩层水平地应力与初始水平地应力存在如下关系^[28]:

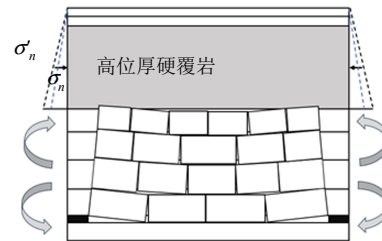
$$\left. \begin{aligned} \sigma'_2 &= \sigma_2 + \frac{N_1\sigma_1 H_1}{H_2}, \sigma'_3 = \sigma_3 + \frac{N_2\sigma'_2 H_2}{H_3} \\ \sigma'_4 &= \sigma_4 + \frac{N_3\sigma'_3 H_3}{H_4}, \dots, \sigma'_n = \sigma_n + \frac{N_{n-1}\sigma'_{n-1} H_{n-1}}{H_n} \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

由式 (41) 可以归纳出采场水平应力的转移规律, 当煤层上方第 $n-1$ 层岩层破断后第 n 层岩层的水平应力 σ'_n 为

$$\sigma'_n = \sigma_n + \frac{H_1\sigma_1 N_1 \dots N_{n-1}}{H_n} + \dots + \frac{H_{n-1}\sigma_{n-1} N_{n-1}}{H_n} \quad (42)$$



(a) 煤层回采前



(b) 煤层回采后

图 6 煤层回采前后水平地应力转移示意图

Fig.6 Schematic diagram of horizontal ground stress transfer before and after coal mining

当岩层破断至高位厚硬岩层底面时, 可认为岩层此时的水平构造应力等于发生应力转移后的水平应力, 即初始水平构造应力和转移来的水平应力

之和, 使得厚硬覆岩底部会存在初始压应力, 从而抵消一部分厚板底部拉应力, 如图 7 所示。

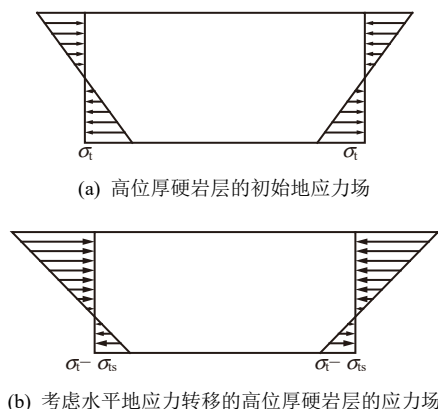


图 7 厚硬覆岩应力分布图

Fig.7 Stress distribution diagram of the thick-and-hard overburden strata

根据图 7 所示, 考虑水平构造应力及水平应力转移的高位厚硬岩层底部最大拉应力为

$$\sigma_{tc} = \sigma_{tmax} - \sigma_{ts} \quad (43)$$

式中: σ_{ts} 为初始水平构造应力和转移来的水平应力之和, 即

$$\sigma_{ts} = \sigma_n + \frac{H_1 \sigma_1 N_1 \cdots N_{n-1}}{H_n} + \cdots + \frac{H_{n-1} \sigma_{n-1} N_{n-1}}{H_n} \quad (44)$$

将式 (44) 代入式 (43), 可得最终高位厚硬岩层底部最大拉应力的计算公式:

$$\sigma_{tc} = \sigma_{tmax} - \sigma_{ts} = \sigma_{tmax} - \left(\sigma_n + \frac{H_1 \sigma_1 N_1 \cdots N_{n-1}}{H_n} + \cdots + \frac{H_{n-1} \sigma_{n-1} N_{n-1}}{H_n} \right) \quad (45)$$

当最大拉应力超过高位厚硬岩层底部岩层极限抗拉强度时, 可认为其发生初次破断。因此, 高位厚硬岩层的初次破断判据为

$$\sigma_{tmax} - \sigma_{ts} - [\sigma_t] \geq 0 \quad (46)$$

式中: $[\sigma_t]$ 为高位厚硬岩层的极限拉应力强度。

4 高位厚硬岩层初断步距计算程序及验证

4.1 高位厚硬岩层初断步距计算程序

根据高位厚硬岩层破断力学分析模型及其初次破断判据, 依托 MATLAB 平台编写了高位厚硬岩层初断步距计算程序。程序计算流程为:

(1) 厚硬覆岩的 y 方向 (倾向) 长度 b 已知

(本例中 $b=600$ m), x 方向 (走向) 初断步距 a 未知, 将其赋一小初值 a_0 (本例中 $a_0=50$ m)。

(2) 由矩阵式 (40) 求出参数 $B_1 \sim L_1$ 并分别代入式 (35)、(36), 计算厚硬覆岩的最大拉应力。通过式 (46) 判断高位厚硬岩层最大拉应力是否满足破断判据。

(3) 若步骤 (2) 不满足初次破断判据, 则将 a_0 每次增加 0.1 m, 迭代计算 (1) 和 (2) 过程, 直至步骤 (2) 满足初次破断判据。为进一步提高计算结果的精确性, 可对比最终 2 个迭代步中函数 $f(a_0)$ 的绝对值, 确定出使该绝对值最小的 a_0 , 将其输出作为高位厚硬岩层的初断步距 a 。高位厚硬岩层初断步距的迭代计算流程如图 8 所示。

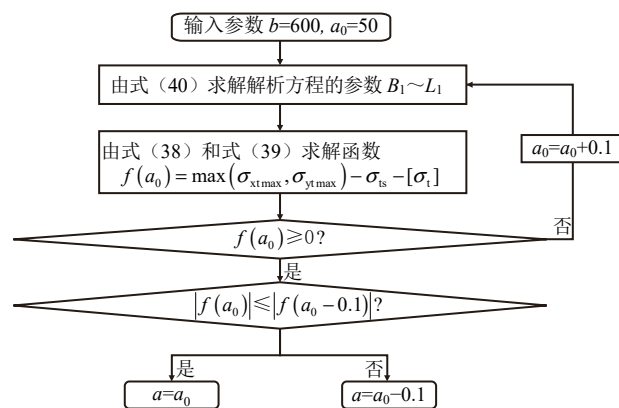


图 8 高位厚硬岩层初断步距计算程序迭代计算流程

Fig.8 The iterative calculation process of the initial break step of the high thick-and-hard overburden strata

4.2 算例验证

石拉乌素煤矿高位厚硬岩层 (主关键层组) 厚度 $h=259.4$ m, 上覆荷载 $q=1.11$ MPa, 岩层泊松比 $\nu=0.3$ 。1208 工作面过 1206A 工作面切眼后, 两工作面贯通, 工作面总宽度为 $b=600$ m。主关键层组底部细、中粒砂岩的抗拉强度 $[\sigma_t]=0.8$ MPa。侧压力系数为 0.702, 取转移系数取 $N_i=0.5^{[28]}$, 计算得到 $\sigma_{ts}=3.45$ MPa。通过初断步距计算程序得到厚硬覆岩初次破断步距为 195.3 m、工作面回采距离为 318.3 m。根据式 (28), 利用 MATLAB 软件绘制得到了厚硬覆岩的挠曲面 (见图 9)。显然, 高位厚硬岩层的挠度在 $x=a/2, y=b/2$ 位置处最大, 约 0.01 m; 厚硬覆岩的四边挠度为 0, 属于固支边, 满足厚板力学模型边界条件。

根据现场报告, 1208 工作面的回采长度在超过 1206A 切眼 289.9 m 位置, 主关键层发生初次“O-X 破断”。通过解析公式计算得到的高位厚硬岩层初次破断的回采距离与现场实测厚硬覆岩初次破断

的回采距离的误差在 10% 以内, 成功验证了本文建立的高位厚硬岩层力学分析模型以及据此编制的高位厚硬岩层初次破断步距计算程序的正确性。

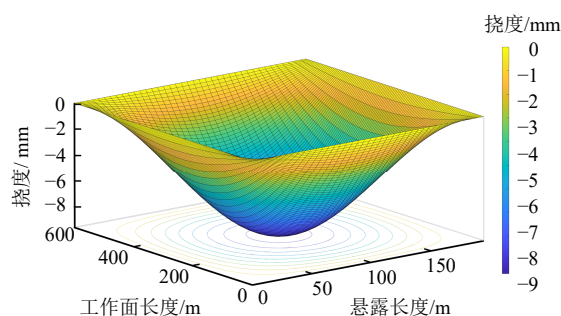


图 9 高位厚硬岩层的挠曲面

Fig.9 Flexural surface of the high thick-and-hard overburden strata

5 高位厚硬岩层初断步距的影响因素

根据式 (40) 可知, 在弹性条件下, 厚硬覆岩初次破断步距主要与工作面宽度 b , 覆岩厚度 h 和上覆荷载大小 q 有关。本节选取石拉乌素 1208 工作面的基本参数: 1208 与 1206A 工作面贯通后的宽度 $b=600$ m, 厚硬覆岩厚度 $h=259.4$ m, 上覆荷载 $q=1.11$ MPa 作为参考值, 利用高位厚硬岩层初断步距计算程序研究工作面宽度、覆岩厚度和上覆荷载对其初次破断步距的影响规律。

5.1 工作面宽度对高位厚硬岩层破断步距的影响

当 1208 工作面推进到 1206A 工作面切眼位置之前, 工作面宽度 $b=290$ m; 当 1208 工作面进入沿空回采后, 工作面长度变为 $b=600$ m。计算以上两种工况下的厚硬覆岩的最大拉应力 $\sigma_{\max}$ 与其初断步距 L 之间的关系曲线, 如图 10 所示。

如图 10 所示, 工况 1 的最大拉应力不超过 1.2 MPa, 远小于 $[\sigma_t] + \sigma_{\text{is}} = 4.25$ MPa, 不足以使厚硬覆岩发生破断; 对于工况 2, 厚硬覆岩暴露长度为 195.3 m 时, 其最大拉应力恰好达到 $[\sigma_t] + \sigma_{\text{is}} = 4.25$ MPa, 且此后继续增大, 因此厚硬覆岩发生了初次破断。这是 1208 工作面沿空回采矿震频发的力学成因。

进一步计算获得工作面宽度 b 与初次破断步距 L 之间的变化关系曲线, 如图 11 所示。

由图 11 可知, 随工作面宽度的增加, 初断步距不断减小, 而初断步距的下降幅度不断减小, 当工作面宽度无限大时, 初断步距会趋向一个极限值, 约为 170 m。此时, 厚硬覆岩的呈竖“O-X”型破断。因此, 在长壁回采过程中应该重点关注两工作面的突然贯通使得高位厚硬覆岩初断步距缩短的情况, 以避免产生大能量矿震事件。

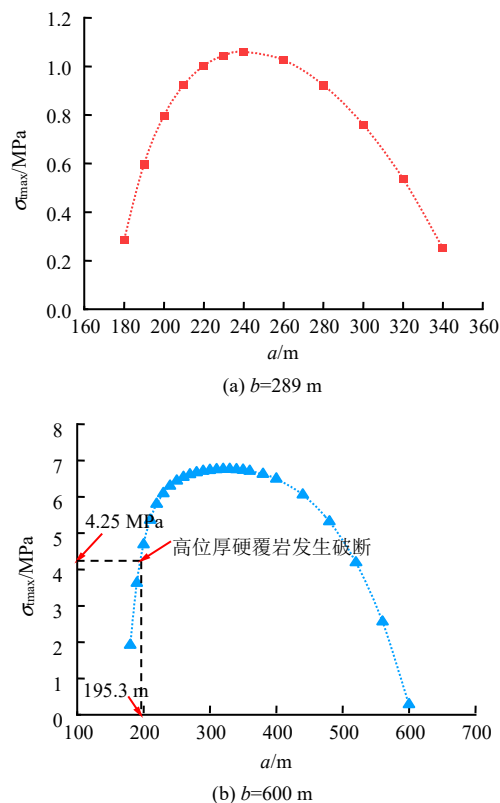


图 10 高位厚硬岩层的最大拉应力与其暴露长度关系曲线

Fig.10 Relation curves of the maximum tensile stress and overhanging length of the high thick-and-hard overburden strata

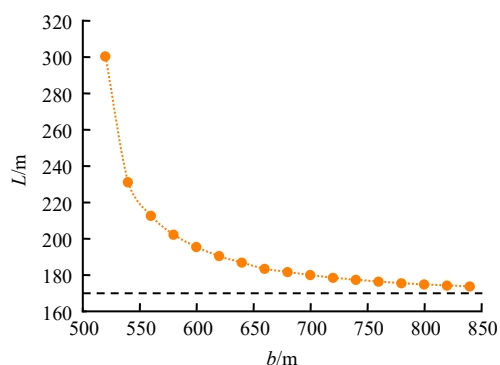


图 11 高位厚硬岩层的初断步距与工作面宽度关系曲线

Fig.11 Relation curve between the initial fracture step distance and the panel width of the high thick-and-hard overburden strata

5.2 覆岩厚度对高位厚硬岩层初次破断步距的影响

当覆岩厚度与工作面宽度的比值大于 1/5 时, 可以将厚硬覆岩简化成厚板^[29]。厚板考虑了横向剪切变形的影响, 必须考虑自重应力场的影响, 有必要研究不同厚板的厚度对于厚硬覆岩初次破断步距的影响。因此, 保持双工作面宽度为 600 m 不变, 厚硬覆岩的厚度取大于 120 m 的一系列值, 计算得到高位厚硬岩层厚度 h 与其初次破断步距 L 之间的变化关系曲线如图 12 所示。

由图 12 可知, 随厚硬覆岩厚度的增加, 初断步距也随之增大。当厚度小于 230 m 时, 初断步距随厚硬覆岩厚度的增加近似线性增长; 当厚度超过 230 m, 随厚度的增加, 初断步距的增速也不断增大。由于工作面宽度保持不变, 当厚度超过一定值时, 此时厚硬覆岩不会发生破断, 这是因为随厚硬覆岩厚度增大, 引起的厚硬覆岩底部拉应力的增加量减小, 导致厚硬覆岩底部拉应力无法超过岩层极限抗拉强度, 因而厚硬覆岩不会发生破断。

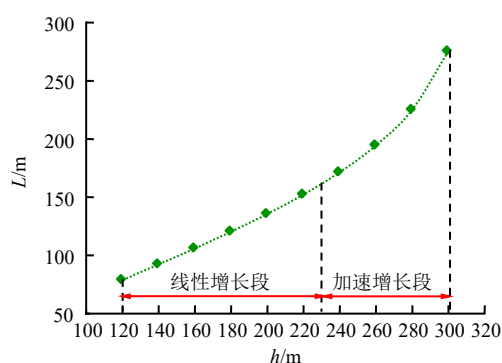


图 12 高位厚硬岩层的初断步距与其厚度关系曲线
Fig.12 Relation curve between the initial fracture step distance and the thickness of the high thick-and-hard overburden strata

5.3 上覆荷载对高位厚硬岩层初次破断步距的影响

取工作面宽度 $b=600$ m, 厚硬覆岩的厚度 $h=259.4$ m。通过改变上覆荷载大小, 计算得到岩层上覆荷载 q 与初断步距 L 关系曲线, 如图 13 所示。

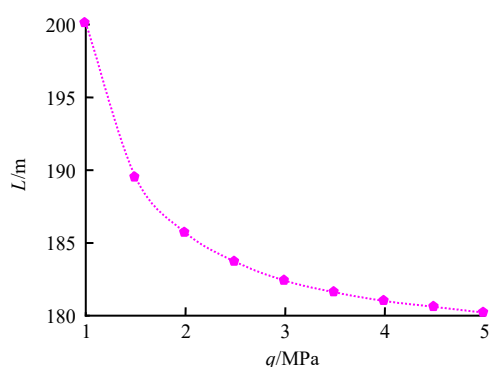


图 13 高位厚硬岩层的初断步距与上覆荷载关系曲线
Fig.13 Relation curve between the initial fracture step distance and the overburden load of the high thick-and-hard overburden strata

由图 13 可知, 随上覆荷载的增加, 初断步距在逐渐减小, 并且减小速率不断递减, 这表明上覆荷载对于厚硬覆岩初断步距的影响随上覆荷载的增加在逐渐减小。这可能是由于上覆荷载的增加,

初断步距不断减小, 荷载向周围岩体的转移量也在逐渐增加, 最终使得上覆荷载的增加主要由周围岩体来进行承载, 从而导致随上覆荷载的增加, 初断步距变化越来越小。

6 结 论

(1) 基于 Reissner 厚板理论, 详细推导了考虑高位厚硬岩层自重应力场影响的高位厚硬岩层挠度、转角、剪力、弯矩和最大拉应力的解析计算公式。

(2) 建立了考虑水平地应力场及其转移的高位厚硬岩层初次破断判据, 并基于 MATLAB 平台编制了一套的高位巨厚覆岩初断步距计算程序。由石拉乌素煤矿高位巨厚覆岩的基本参数计算得到的高位厚硬岩层初次破断的回采距离与现场实测厚硬覆岩初次破断的回采距离的误差在 10% 以内, 验证了解析计算公式的可靠性。

(3) 基于高位厚硬岩层初断步距计算程序, 系统分析了工作面宽度、厚硬覆岩的厚度以及上覆荷载对于厚硬覆岩初断步距的影响规律。1208 工作面与 1206A 工作面贯通将导致高位厚硬岩层的峰值拉应力显著提高, 易满足覆岩破断判据。此外, 高位厚硬岩层的初断步距随工作面宽度、上覆荷载的增加而减速递减; 而随覆岩厚度的增加先线性增加后加速增加。

参 考 文 献

- [1] 李培涛, 刘泉声, 朱元广, 等. 煤矿深部巷道大变形分步联合控制研究[J]. 岩土力学, 2025, 46(2): 591-612.
LI Pei-tao, LIU Quan-sheng, ZHU Yuan-guang, et al. Combined support method for large deformation of deep coal mine tunnel[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2025, 46(2): 591-612.
- [2] 高晓进, 张震, 黄志增, 等. 深井直覆硬厚顶板侧向破断模式及采动应力响应特征研究[J]. 岩土力学, 2024, 45(8): 2450-2461.
GAO Xiao-jin, ZHANG Zhen, HUANG Zhi-zeng, et al. Lateral fracture mode and mining stress response characteristics of overlying and thick-hard roof in deep mining well[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2024, 45(8): 2450-2461.
- [3] 朱斯陶, 刘金海, 姜福兴, 等. 我国煤矿顶板运动型矿震及诱发灾害分类、预测与防控[J]. 煤炭学报, 2022, 47(2): 807-816.
ZHU Si-tao, LIU Jin-hai, JIANG Fu-xing, et al.

- Classification, prediction, prevention and control of roof movement-type mine earthquakes and induced disasters in China's coal mines[J]. **Journal of China Coal Society**, 2022, 47(2): 807-816.
- [4] 钱鸣高. 采场上覆岩层的平衡条件[J]. 中国矿业学院学报, 1981, 10(2): 34-43.
QIAN Ming-gao. Conditions required for equilibrium of overlying strata at working areas[J]. **Journal of China University of Mining & Technology**, 1981, 10(2): 34-43.
- [5] 许家林. 岩层控制与煤炭科学开采——记钱鸣高院士的学术思想和科研成就[J]. 采矿与安全工程学报, 2019, 36(1): 1-6.
XU Jia-lin. Strata control and scientific coal mining—a celebration of the academic thoughts and achievements of academician Minggao Qian[J]. **Journal of Mining & Safety Engineering**, 2019, 36(1): 1-6.
- [6] 王家臣, 许家林, 杨胜利, 等. 煤矿采场岩层运动与控制研究进展——纪念钱鸣高院士“砌体梁”理论 40 年[J]. 煤炭科学技术, 2023, 51(1): 80-94.
WANG Jia-chen, XU Jia-lin, YANG Sheng-li, et al. Development of strata movement and its control in underground mining: in memory of 40 years of Voussoir Beam Theory proposed by Academician Minggao Qian[J]. **Coal Science and Technology**, 2023, 51(1): 80-94.
- [7] 宋振骐, 蒋宇静, 刘建康. “实用矿山压力控制”的理论和模型[J]. 煤炭科技, 2017(2): 1-10.
SONG Zhen-qi, JIANG Yu-jing, LIU Jian-kang. Theory and model of “practical method of mine pressure control”[J]. **Coal Science & Technology Magazine**, 2017(2): 1-10.
- [8] 宋振骐, 郝建, 石永奎, 等. “实用矿山压力控制理论”的内涵及发展综述[J]. 山东科技大学学报(自然科学版). 2019, 38(1): 1-15.
SONG Zhen-qi, HAO Jian, SHI Yong-kui, et al. An overview of connotation and development of practical ground pressure control theory[J]. **Journal of Shandong University of Science and Technology (Natural Science)**, 2019, 38(1): 1-15.
- [9] 史红, 姜福兴. 采场上覆大厚度坚硬岩层破断规律的力学分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(18): 3066-3069.
SHI Hong, JIANG Fu-xing. Mechanical analysis of rupture regularity of hard and massive overlying strata of long wall face[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2004, 23(18): 3066-3069.
- [10] 鞠金峰, 许家林, 朱卫兵. 浅埋特大采高综采工作面关键层“悬臂梁”结构运动对端面漏冒的影响[J]. 煤炭学报, 2014, 39(7): 1197-1204.
JU Jin-feng, XU Jia-lin, ZHU Wei-bing. Influence of key strata cantilever structure motion on end-face fall in fully-mechanized face with super great mining height[J]. **Journal of China Coal Society**, 2014, 39(7): 1197-1204.
- [11] 王平, 姜福兴, 冯增强, 等. 高位厚硬顶板断裂与矿震预测的关系探讨[J]. 岩土工程学报, 2011, 33(4): 618-623.
WANG Ping, JIANG Fu-xing, FENG Zeng-qiang, et al. Relationship between fracture of high-position thick and hard roof and mine quake forecast[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2011, 33(4): 618-623.
- [12] 宋彦琦, 杨敏健, 马宏发, 等. 基于薄板理论的孤岛工作面基本顶变形规律及破断距研究[J]. 煤矿安全, 2022, 53(7): 201-207.
SONG Yan-qi, YANG Min-jian, MA Hong-fa, et al. Study on deformation law and breaking span of main roof of isolated panel based on thin plate theory[J]. **Safety in Coal Mines**, 2022, 53(7): 201-207.
- [13] MINDLIN R D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates[J]. **Journal of Applied Mechanics**, 1951, 18(1): 31-38.
- [14] REISSNER E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates[J]. **Journal of Applied Mechanics**, 1945, 12(2): A69-A77.
- [15] 白贤栖, 曹安业, 杨耀, 等. 高位巨厚覆岩运移规律及矿震触发机制研究[J]. 煤炭科学技术, 2023, 51(3): 10-20.
BAI Xian-xi, CAO An-ye, YANG Yao, et al. Study on movement law of extremely thick strata and triggering mechanism of mine earthquakes[J]. **Coal Science and Technology**, 2023, 51(3): 10-20.
- [16] 杨耀, 曹安业, 白贤栖, 等. 深井巨厚覆岩邻空采动强矿震孕育发生机理[J]. 煤炭科学技术, 2023, 51(12): 220-231.
YANG Yao, CAO An-ye, BAI Xian-xi, et al. Occurrence mechanism of strong mining tremors under mining near goaf in deep mine with extremely thick strata[J]. **Coal Science and Technology**, 2023, 51(12): 220-231.
- [17] 钱鸣高, 缪协兴, 许家林. 岩层控制中的关键层理论研究[J]. 煤炭学报, 1996, 21(3): 225-230.
QIAN Ming-gao, MIAO Xie-xing, XU Jia-lin. Theoretical study of key stratum in ground control[J].

- Journal of China Coal Society**, 1996, 21(3): 225-230.
- [18] 李银山. Maple 材料力学[M]. 北京: 机械工业出版社, 2009.
- LI Yin-shan. Maple materials mechanics[M]. Beijing: China Machine Press, 2009.
- [19] 杨胜利, 岳豪, 唐岳松, 等. 基于中厚板理论的顶板断裂失稳规律研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2024, 43(9): 2092-2107.
- YANG Sheng-li, YUE Hao, TANG Yue-song, et al. Study on the characteristics of roof fracture instability based on the theory of medium thick plate[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2024, 43(9): 2092-2107.
- [20] 邱凯, 李树忱, 刘日成, 等. 内衬式地下洞室群氢能存储隆起破坏机制分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2024, 43(2): 468-480.
- QIU Kai, LI Shu-chen, LIU Ri-cheng, et al. Analysis of uplift failure mechanism for underground lined rock caverns in hydrogen energy storage[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2024, 43(2): 468-480.
- [21] 任明洋. 深部隧洞施工开挖围岩—支护体系协同承载作用机理研究[D]. 济南: 山东大学, 2020.
- REN Ming-yang. Study on mechanism of collaborative bearing effect of rock-support system in deep tunnel construction[D]. Jinan: Shandong University, 2020.
- [22] 许家林, 钱鸣高. 覆岩关键层位置的判别方法[J]. 中国矿业大学学报, 2000, 29(5): 463-467.
- XU Jia-lin, QIAN Ming-gao. Method to distinguish key strata in overburden[J]. **Journal of China University of Mining & Technology**, 2000, 29(5): 463-467.
- [23] 杨耀. 巨厚覆岩临空采动强矿震孕灾机理研究[D]. 徐州: 中国矿业大学, 2023.
- YANG Yao. Research on disaster mechanism of strong mining tremors induced by mining near the goaf with super-thick overlying strata[D]. Xuzhou: China University of Mining and Technology, 2023.
- [24] 龙述尧, 姜琛. 中厚板理论的适用范围和精确程度的研究[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2012, 39(1): 37-41.
- LONG Shu-yao, JIANG Chen. Research on the applicable range and accuracy of moderately thick plate theory[J]. **Journal of Hunan University (Natural Sciences)**, 2012, 39(1): 37-41.
- [25] 何福保, 沈亚鹏. 板壳理论[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1993.
- HE Fu-bao, SHEN Ya-peng. Plate-shell theory[M]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 1993.
- [26] 梁兴复, 曲庆璋. 弹性矩形板的一般精确解[J]. 长安大学学报(自然科学版), 1992(1): 53-62.
- LIANG Xing-fu, QU Qing-zhang. The general exact solution of elastic rectangular plates[J]. **Journal of Chang'an University (Natural Science Edition)**, 1992(1): 53-62.
- [27] 王树立, 张开智, 蒋金泉, 等. 超厚高位红层砂岩破断运动与矿震活动规律[J]. 采矿与安全工程学报, 2016, 33(6): 1116-1122.
- WANG Shu-li, ZHANG Kai-zhi, JIANG Jin-quan, et al. The fracture and rockburst laws of high-position hard and extremely thick red beds[J]. **Journal of Mining & Safety Engineering**, 2016, 33(6): 1116-1122.
- [28] 张明, 姜福兴, 陈广尧, 等. 基于厚硬岩层运动状态的采场应力转移模型及其应用[J]. 岩石力学与工程学报, 2020, 39(7): 1396-1407.
- ZHANG Ming, JIANG Fu-xing, CHEN Guang-yao, et al. A stope stress transfer model based on the motion state of thick and hard rock strata and its application[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2020, 39(7): 1396-1407.
- [29] 徐芝纶. 弹性力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.
- XU Zhi-lun. Elasticity mechanics[M]. Beijing: Higher Education Press, 2003.